

امتحان شهادة بكالوريا التعليم الثانوي دورة 2008

الشعبة : تقني رياضي

المدة : 04 ساعات و 30 د

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :  
الموضوع الأول

تمرين 1: (4 نقاط)

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة (\*) المعرفة كما يلي:

$$Z^3 + (2-4i)Z^2 - (6+9i)Z + 9(-1+i) = 0 \quad \dots (*)$$

1/ بيّن أن  $Z_0 = 3i$  هو حل للمعادلة (\*)

2/ حل، في  $\mathbb{C}$ ، المعادلة (\*) ثم اكتب حلولها  $Z_0, Z_1, Z_2$  على الشكل الأسّي حيث  $|Z_1| < |Z_2|$ .

3/ لتكن  $A, B, C$  صور الحلول  $Z_0, Z_1, Z_2$  على الترتيب في مستو منسوب إلى معلم متعامد

ومتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . عيّن النقطة  $G$  مرجح الجملة  $\{(A,1); (B,1); (C,-1)\}$ .

4/ عيّن المجموعة  $(E)$  للنقطة  $M$  حيث :  $AM^2 + BM^2 - CM^2 = -13$

بيّن أن النقطة  $A$  تنتمي إلى المجموعة  $(E)$  ثم أنشئ  $(E)$ .

5/ تحقق أن النقطة  $O, B$  و  $G$  في استقامة ثم عيّن صورة المجموعة  $(E)$  بالتحاكي الذي مركزه

النقطة  $O$  ويحول  $B$  إلى  $G$  محددًا عناصره المميزة.

تمرين 2: (5 نقاط)

نعتبر الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$A(1,2,2), B(3,2,1), C(1,3,3)$  نقط من هذا الفضاء.

1/ برهن أن النقط  $A, B, C$  تعين مستو يطلب تعيين معادلته الديكارتية.

2/ نعتبر المستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$  المعرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين :

$$(P_1): x - 2y + 2z - 1 = 0$$

$$(P_2): x - 3y + 2z + 2 = 0$$

بيّن أن  $(P_1)$  و  $(P_2)$  يتقاطعان وفق مستقيم  $(\Delta)$ .

3/ بيّن أن النقطة  $C$  تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta)$ .

4/ بيّن أن الشعاع  $\vec{u}(2,0,-1)$  هو أحد أشعة توجيه المستقيم  $(\Delta)$ .

5/ استنتج أن التمثيل الوسيط للمستقيم  $(\Delta)$  هو الجملة:

$$\begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 3 \\ z = -k + 3 \end{cases}$$

حيث  $(k \in \mathbb{R})$

6/ لتكن  $M$  نقطة من المستقيم  $(\Delta)$  ، أوجد قيمة الوسيط  $k$  حتى يكون الشعاعان  $AM$  و  $u$  متعامدين، ثم استنتج المسافة بين النقطة  $A$  والمستقيم  $(\Delta)$ .

### تمرين 3: (7 نقاط)

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $[0;2]$  بالعلاقة

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$$

1/ أ- ادرس تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $[0;2]$

ب- أنشئ  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
(الوحدة على المحورين  $4cm$ )

ج- برهن أنه إذا كان  $x \in [0;2]$  فإن  $f(x) \in [0;2]$ .

2/ نعرف المتتالية العددية  $(U_n)$  على  $\mathbb{N}$  كالآتي:

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

أ- برّر وجود المتتالية  $(U_n)$ . احسب الحدين  $U_1$  و  $U_2$   
ب- مثل الحدود  $U_0$  ،  $U_1$  و  $U_2$  على محور الفواصل وذلك بالاستعانة بالمنحنى  $(C)$  والمستقيم  $(D)$  ذو المعادلة  $y = x$ .

ج- ضع تخميناً حول اتجاه تغير  $(U_n)$  و تقاربها انطلاقاً من التمثيل السابق.

3/ أ- برهن بالتراجع على العدد الطبيعي  $n$  أن:  $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$ .

ب- برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي  $n$  فإن:  $U_{n+1} > U_n$ .  
ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب  $(U_n)$  ؟

ج- تحقق أن:  $U_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{U_n + 2} (U_n - \sqrt{3})$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم.

عَيّن عدداً حقيقياً  $k$  من  $]0;1[$  بحيث:  $|U_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k |U_n - \sqrt{3}|$

بيّن أنه من أجل  $n \in \mathbb{N}^*$ :  $|U_n - \sqrt{3}| \leq k^n |U_0 - \sqrt{3}|$ . استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

### تمرين 4: (4 نقاط)

$n$  عدد طبيعي أكبر من 5.

1/  $a$  و  $b$  عددان طبيعيان حيث  $a = n - 2$  و  $b = 2n + 3$

أ- ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $b$  ؟

ب- بيّن أن العددين  $a$  و  $b$  من مضاعفات 7 إذا وقط إذا كان  $n + 5$  مضاعفاً للعدد 7.

ج- عَيّن قيم  $n$  التي يكون من أجلها  $PGCD(a; b) = 7$

2/ نعتبر العددين الطبيعيين  $p$  و  $q$  حيث:

$$q = n^2 - 7n + 10 \quad \text{و} \quad p = 2n^2 - 7n - 15$$

أ- بيّن أن كل من العددين  $p$  و  $q$  يقبل القسمة على  $n - 5$ .

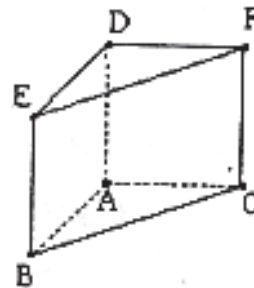
ب- عَيّن تبعاً لقيم  $n$  وبدلالة  $n$  ،  $PGCD(p; q)$ .

التمرين الأول: ( 04 نقاط )

- نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين  $x$  و  $y$  : (I) .....  $4x - 9y = 319$
- (1) - تأكد أن الثنائية  $(1, 82)$  حل للمعادلة (I).  
- حل المعادلة (I).
- (2) عين الثنائيات  $(a, b)$  الصحيحة، حلول المعادلة : (II) .....  $4a^2 - 9b^2 = 319$
- (3) استنتج الثنائيات  $(x_0, y_0)$  حلول المعادلة (I) بحيث  $x_0$  و  $y_0$  مربعين تامين.

التمرين الثاني : ( 04 نقاط )

$ABCDEF$  موشور قائم قاعدته المثلث  $ABC$  القائم في  $A$  والتمساوي الساقين وجهه  $ABED$  و  $ACFD$  مربعان متقايسان طول ضلع كل منهما  $r$  حيث  $r \in \mathbb{R}^+$ .  
(انظر الشكل)



- (1) يرمز  $I$  إلى منتصف  $[AD]$  و  $J$  إلى مركز ثقل الرباعي  $BCFE$ . بين أن  $G$  مرجح الجملة  $\{(A;2), (B;1), (C;1), (D;2), (E;1), (F;1)\}$  هو منتصف  $[IJ]$
- (2) ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(A; \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})$ .
- عين إحداثيات النقط  $F, E, D, C, B, A$   
- عين مجموعة النقط  $M$  من الفضاء التي تحقق :  
 $2MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2MD^2 + ME^2 + MF^2 = 10r^2$

التمرين الثالث : ( 04 نقاط )

- $r$  عدد حقيقي موجب تماما و  $\theta$  عدد حقيقي كفي.
- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  :  
 $z^2 - 2i \left(r \cos \frac{\theta}{2}\right)z - r^2 = 0$   
اكتب الحلين على الشكل الآسي.
- (2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  نعتبر النقطتين  $A$  و  $B$  صورتا الحلين.  
عين  $\theta$  حتى يكون المثلث  $OAB$  متقايس الأضلاع.

1 (  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $]-2; +\infty[$  كما يأتي:  $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$  .

$C_r$  منحنى  $f$  في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \bar{i}, \bar{j})$ .  
( وحدة الأطوال  $2cm$  )

أ - احسب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجموعة التعريف .

ب - ادرس اتجاه تغير  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.

ج - بين أن المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y = x - 2$  مقارب للمنحنى  $C_r$  ثم ارسم  $C_r$  و  $(D)$ .

د - بين أن صورة المجال  $\left[1; \frac{5}{2}\right]$  محتواة في المجال  $\left[1; \frac{5}{2}\right]$

2 ( نعتبر المتتالية العددية  $(U_n)$  المعرفة بحدّها الأول  $U_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$

لدينا:  $U_{n+1} = f(U_n)$  .

أ - باستخدام  $C_r$  و المستقيم ذي المعادلة  $y = x$ ، مثل  $U_0$  و  $U_1$  و  $U_2$  على حامل محور الفواصل  $(Ox)$  .

ب - خمن اتجاه تغير وتقارب المتتالية  $(U_n)$  .

ج - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن:  $1 \leq U_n \leq \frac{5}{2}$  و أن المتتالية  $(U_n)$  متزايدة .

د - استنتج أن  $(U_n)$  متقاربة و احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  .