

اختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول: (05 نقاط)

(I) الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 3}$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة f .

(2) بين أنه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$: $f(x) \geq 0$

(II) لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} كما يلي : $u_0 = 0, u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أحسب الحدين u_1 و u_2 .

(2) * بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$.

ب* استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(III) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n^2 - 1$

(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

(2) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(3) أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

(4) عبر عن المجاميع التالية بدلالة n

$$S_n = (u_0 - 1)(u_0 + 1) + (u_1 - 1)(u_1 + 1) + (u_2 - 1)(u_2 + 1) + \dots + (u_n - 1)(u_n + 1)$$

$$S_n' = (u_0^2 - 0) + (u_1^2 - 1) + (u_2^2 - 2) + \dots + (u_n^2 - n)$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1 / أ* عين مجموعة الثنائيات $(x; y)$ من \mathbb{Z}^2 حلول المعادلة: $(E): 8x - 5y = 3$

ب* ليكن m عددا صحيحا بحيث توجد ثنائية $(p; a)$ من الأعداد الصحيحة تحقق: $m = 8p + 1$ و $m = 5a + 4$

بين أن الثنائية $(p; q)$ هي حل للمعادلة (E) ، واستنتج أن: $m \equiv 9[40]$

ج* عين أصغر عدد طبيعي m أكبر من 2000 .

2 / أ* أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا: $2^{3k} \equiv 1[7]$

ب* ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2009} على 7 ؟

3 / ليكن a و b عدنان طبيعيين أقل من أو يساوي 9 مع $a \neq 0$ ، ونعتبر العدد N حيث N يكتب في النظام العشري

كما يلي $N = \overline{a00b}$. نريد تعيين من ضمن هذه الأعداد الطبيعية N تلك التي تقبل القسمة على 7

أ* تحقق من أن: $10^3 \equiv -1[7]$

ب* استنتج الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على 7 في الحالة $a \equiv 2[7]$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

كيس يحتوي على 8 كرات منها 4 كرات حمراء و 3 كرات خضراء و كرة واحدة بيضاء ، نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات من الكيس .
1/ أ * احسب عدد الحالات الممكنة .

ب * احسب احتمالات الأحداث التالية :

A " الحصول على 3 كرات من نفس اللون".

B " الحصول على كرة على الأقل حمراء " .

C " الحصول على كرتين على الأكثر حمراء " .

2 / نسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الألوان المحصل عليها .
أ * ما هي قيم X ؟

ب * احسب الاحتمالات التالية : $P(X=1)$ ، $P(X=3)$ واستنتج $P(X=2)$.

ج * احسب الأمل الرياضي ، التباين ثم الانحراف المعياري .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = x - 1 + e^{-x}$.

1 / ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها .

2 / أ * بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد معدوم .

ب * استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} * بـ: $f(x) = \ln(x - 1 + e^{-x})$.

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 / أ * احسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب * احسب : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. فسر النتيجة هندسيا .

2 / ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

3 / أ * أثبت أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f(x) = -x + \ln(xe^x - e^x + 1)$.

ب * استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $-\infty$ - يطلب تعيين معادلته .

ج * ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

4 / أ * احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$ ، ماذا يمكن القول عن المنحنيين (C_f) و (C_{\ln}) ؟

ب * ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_{\ln}) .

5 / بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α ; β حيث: $-1.1 < \alpha < -1.2$ و $1.8 < \beta < 1.9$

6 / أ * أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1 .

ب * أنشئ المستقيمين (Δ) و (T) والمنحنيين (C_f) و (C_{\ln}) .

7 / m عدد حقيقي ، ناقش حسب قيم العدد الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة:

$$(E) \dots \ln(x - 1 + e^{-x}) - (e - 1)x - 1 = m$$

بالتوفيق

التمرين الأول :

(I) الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 3}$$

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة f :الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 3}}$ بما ان $f'(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ فإن f متزايدة تماما على $[0; +\infty[$ (2) نبين أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f(x) \geq 0$ لدينا: الدالة f متزايدة تماما على $[0; +\infty[$ و $f(0) = 0$,الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى عند $x = 0$ في المجال $[0; +\infty[$. اذن: من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f(x) \geq 0$ (II) (u_n) متتالية معرفة على \mathbb{R} بـ: $u_0 = 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$

$$\text{حساب } u_1 \text{ و } u_2 : u_1 = f(u_0) = \frac{1}{2}\sqrt{u_0^2 + 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$u_2 = f(u_1) = \frac{1}{2}\sqrt{u_1^2 + 3} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

(2) أنبين انه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$ * من اجل $n = 0$: $0 \leq u_0 < u_1 < 1$ محققة لأن

$$(1) \dots (u_0 = 0, u_1 \approx 0.86)$$

*نفرض أن : $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$ ونبرهن ان :

$$0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} < 1 \text{ حيث } n \text{ عدد طبيعي .}$$

لدينا: f متزايدة تماما على $[0; +\infty[$ و $f(1) = 1$ و $f(0) = 0$ إذا كان $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$ فإن

$$f(0) \leq f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(1)$$

$$\text{أي : } 0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} < 1 \dots \dots \dots (2)$$

من (1) و (2) حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنه من

أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$ ب/* استنتاج ان المتتالية (u_n) متقاربة: لدينامن أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$ معناه أنالمتتالية (u_n) متزايدة تماما على \mathbb{R} ومحدودة من الأعلى

ومحدودة من الأسفل.

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على \mathbb{R} ومحدودة منالأعلى فإنها متقاربة نحو عدد حقيقي l .

$$**\text{حساب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n : \text{ لدينا } u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 3}$$

المتتالية (u_n) متقاربة نحو l معناه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$

$$l = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 + 3} \text{ يكافئ } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n^2 + 3}$$

$$\text{يكافئ } (2l)^2 = (\sqrt{l^2 + 3})^2 \text{ و } l > 0$$

$$\text{يكافئ } 4l^2 = l^2 + 3 \text{ و } l > 0$$

$$\text{يكافئ } l = 1 \text{ (مقبول) أو } l = -1 \text{ (مرفوض)}$$

$$\text{ومنه: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

(III) لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n^2 - 1$ (1) نبين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول: (v_n) م.ه معناه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = qv_n$

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1 = \frac{1}{4}(u_n^2 + 3) - 1 = \frac{1}{4}(u_n^2 - 1)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n \text{ ومنه } (v_n) \text{ م.ه أساسها } q = \frac{1}{4} \text{ وحدها الأول}$$

$$v_0 = u_0^2 - 1 = -1$$

$$(2) \text{ التعبير عن } v_n \text{ بدلالة } n : v_n = v_0 q^n = -\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n : لدينا $u_n^2 = v_n + 1$

$$\text{ومنه: } u_n = \sqrt{v_n + 1} \text{ (لأن } u_n > 0 \text{)}$$

$$\text{اذن: } u_n = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

$$(3) \text{ حساب نهاية } (u_n) : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n} = 1$$

(4) التعبير عن المجاميع التالية بدلالة n :

$$S_n = (u_0 - 1)(u_0 + 1) + (u_1 - 1)(u_1 + 1)$$

$$+ (u_2 - 1)(u_2 + 1) + \dots + (u_n - 1)(u_n + 1)$$

$$= (u_0^2 - 1) + (u_1^2 - 1) + (u_2^2 - 1) + \dots + (u_n^2 - 1)$$

$$= v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

$$\text{ومنه: } S_n = \left(\frac{-4}{3} \right) \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right)$$

ب* استنتاج الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على

7 في الحالة $a \equiv 2[7]$ و $b \equiv 2[7]$

لدينا $N = a \times 10^3 + b$ ولدينا $a \times 10^3 \equiv -a[7]$ إذن

$a \times 10^3 + b \equiv -a + b[7]$ ومنه

يكون $N \equiv 0[7]$ إذا وفقط إذا كان $a \equiv b[7]$

ولدينا $a \equiv 2[7]$ إذن $b \equiv 2[7]$ ، ومنه القيم الممكنة للعددين

a و b هي $a = 2$ أو $a = 9$ و $b = 2$ أو $b = 9$

ومنه هناك أربعة قيم ممكنة للعدد الطبيعي N وهي:

2002; 2009; 9002; 9009

التمرين الثالث:

1 / أ* الحالات الممكنة لسحب 3 كرات هي:

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$$

ب* حساب احتمال الأحداث

A: "الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون"

$$P(A) = \frac{\text{الحالات الملائمة}}{\text{الحالات الممكنة}} = \frac{C_3^3 + C_4^3}{56} = \frac{1+4}{56} = \frac{5}{56}$$

B: "الحصول على كرة على الأقل حمراء"

$$P(B) = \frac{\text{الحالات الملائمة}}{\text{الحالات الممكنة}} = \frac{C_4^1 \times C_4^2 + C_4^2 \times C_4^1 + C_4^3 \times C_4^0}{56} = \frac{24+24+4}{56} = \frac{52}{56} = \frac{13}{14}$$

C: "الحصول على كرتين على الأكثر حمراء"

$$P(C) = \frac{C_4^0 \times C_4^3 + C_4^1 \times C_4^2 + C_4^2 \times C_4^1}{56} = \frac{4+24+24}{56} = \frac{52}{56} = \frac{13}{14}$$

2 / تعيين قيم X :

$$X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$$

$$P(X=1) = P(A) = \frac{5}{56}$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_1^1}{56} = \frac{4 \times 3 \times 1}{56} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$$

$$\begin{aligned} S_n' &= (u_0^2 - 0) + (u_1^2 - 1) + \dots + (u_n^2 - n) \\ &= u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2 - (0+1+2+\dots+n) \\ &= (v_0+1) + (v_1+1) + \dots + (v_n+1) - \left[\frac{(n+1)}{2} (0+n) \right] \\ &= (v_0+v_1+\dots+v_n) + (n+1) - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

التمرين الثاني:

1 / أ* تعيين حلول المعادلة: $8x - 5y = 3$ (E):

واضح أن الثنائية $(1;1)$ هي حل خاص للمعادلة (E)، عندئذ نجد $x = 5k + 1$ و $y = 8k + 1$ حيث k عدد صحيح

ب* إثبات أن الثنائية $(p; q)$ هي حل للمعادلة (E) و

استنتاج أن: $m \equiv 9[40]$

من المعطيات فإن الأعداد الصحيحة m و p و q تحقق العلاقة

$5q = m - 4$ و $8p = m - 1$ وهذا يعني أن: $8p - 5q = 3$ ومنه الثنائية $(p; q)$ حل للمعادلة (E) وبالتالي يوجد عدد صحيح λ حيث

$$p = 5\lambda + 1 \text{ ولدينا } m = 8p + 1$$

$$m = 8(5\lambda + 1) + 1 = 40\lambda + 9$$

وهذا يعني أن: $m \equiv 9[40]$

ج* تعيين أصغر عدد طبيعي m أكبر من 2000:

$40k + 9 \geq 2000$ معناه $k \geq 49,775$ ومنه أصغر قيمة

هي $k = 50$ وهذا يعطي القيمة المطلوبة لـ m وهي

$$m = 2009$$

2 / أ* إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا:

$$2^{3k} \equiv 1[7]$$

لدينا $2^3 = 8$ أي $2^3 \equiv 1[7]$ ومنه

من أجل كل عدد طبيعي k لدينا $2^{3k} \equiv 1[7]$

ب* تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2009} على 7:

$$2^{2009} \equiv 1 \times 4[7] \text{ إذن } 2^{2009} = 2^{3 \times 669} \times 2^2$$

$$\text{ومنه } 2^{2009} \equiv 4[7]$$

3 / أ* التحقق من أن: $10^3 \equiv -1[7]$:

لدينا $10^3 + 1 = 1001 = 7 \times 143$ ومنه $10^3 \equiv -1[7]$

استنتاج $P(X=2)$

لدينا : $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

ومنه

$$P(X=2)=1-P(X=1)-P(X=3)$$

$$=1-\frac{5}{56}-\frac{12}{56}=\frac{39}{56}$$

ومنه قانون توزيع الاحتمال للمتغير العشوائي X :

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$

ج - حساب الامل الرياضي :

$$E(X)=\left(1 \times \frac{5}{56}\right)+\left(2 \times \frac{39}{56}\right)+\left(3 \times \frac{12}{56}\right)=\frac{119}{56} \approx 2.13$$

* حساب التباين والانحراف المعياري :

$$v(X)=\sum_{i=1}^3(x_i-E(X))^2 \times p_i \approx 0.29$$

$$\sigma(X)=\sqrt{v(X)} \approx 0.54$$

التمرين الرابع :

الدالة معرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = x - 1 + e^{-x}$

1) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

من أجل كل x من \mathbb{R} : $g'(x) = 1 - e^{-x}$

* $g'(x) = 0$ معناه : $1 - e^{-x} = 0$

معناه : $-x = 0$ معناه : $x = 0$

* $g'(x) > 0$ معناه : $1 - e^{-x} > 0$

معناه : $-e^{-x} > -1$ معناه : $e^{-x} < 1$

معناه : $-x < 0$ معناه : $x > 0$ ومنه

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

الدالة g متزايدة تماما على $[0; +\infty[$ و متناقصة تماما

على $]-\infty; 0]$

النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{x} \right) \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

2) أ - اثبات أن $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد معدوم :

الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى عند 0 هي 0 ومنه

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا معدوما في \square .

ب - استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	+	0	+

II الدالة f معرفة على \mathbb{R}^* بـ :

$$f(x) = \ln(x - 1 + e^{-x})$$

1) حساب النهايات :

أ *

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ب *

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (محور

التراتب) هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f)

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $f(x) = \ln(g(x))$

من أجل كل x من \mathbb{R}^* :

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1-e^{-x}}{x+1+e^{-x}}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g'(x)$ لان : $g(x) > 0$ من

أجل $x \neq 0$

الدالة f متزايدة تماما على $]0; +\infty[$ و متناقصة تماما

على $]-\infty; 0]$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

3) أ - اثبات أنه من أجل كل x من \mathbb{R}^* :

$$f(x) = -x + \ln(xe^x - e^x + 1)$$

لدينا : $f(x) = \ln(x - 1 + e^{-x})$

$$f(x) = \ln(e^{-x}(xe^x - e^x + 1))$$

$$= \ln(e^{-x}) + \ln(xe^x - e^x + 1)$$

$$= -x + \ln(xe^x - e^x + 1)$$

ب - استنتاج ان (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $-\infty$:

بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - e^x + 1) = 0$ فان

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مستقيم مقارب مائل لـ

(C_f) بجوار $(-\infty)$.

بما أن $f(-1.2)f(-1.1) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم

المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث

$$-1.2 < \alpha < -1.1$$

الدالة f مستمرة ورتبية تماما على $]0; +\infty[$ و منه مستمرة

و رتبية تماما على $]1.8; 1.9[$ و $f(1.8) = -0.03$ و

$$f(1.9) = 0.04$$

بما أن $f(1.8)f(1.9) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم

المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث

$$1.8 < \beta < 1.9$$

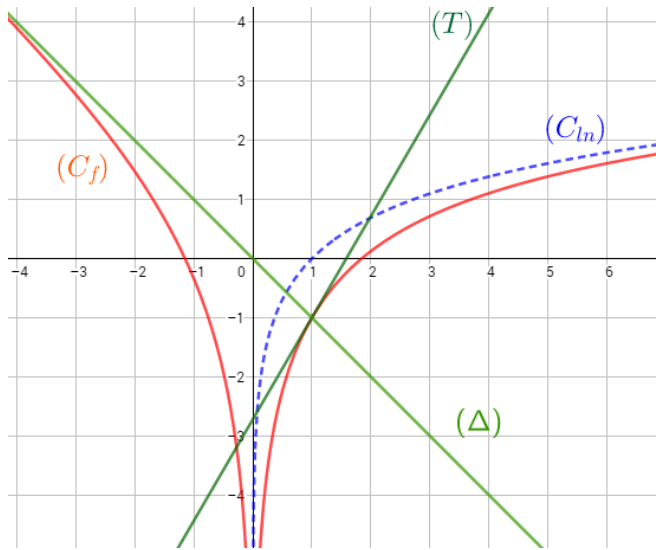
6 أ - كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$(T): y = (e - 1)(x - 1) - 1$$

$$(T): y = (e - 1)x - e$$

ب - الإنشاء



7 المناقشة البيانية :

(E) تكافئ: $\ln(x - 1 + e^{-x}) = (e - 1)x + 1 + m$

تكافئ: $f(x) = (e - 1)x + 1 + m$

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع

المستقيمات ذات المعادلة: $y = (e - 1)x + 1 + m$.

الموازية لـ (T).

① إذا كان $1 + m < -e$ أي $m < -1 - e$ فإن

المعادلة (E) تقبل حلين موجبين تماما و حل سالب .

② إذا كان $1 + m = -e$ أي $m = -1 - e$ فإن

المعادلة (E) تقبل حل مضاعف موجب و حل سالب .

③ إذا كان $1 + m > -e$ أي $m > -1 - e$ فإن

المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا سالب .

ج - دراسة الوضع النسبي لـ (Δ) و (C_f) :

لدينا : $f(x) - y = \ln(xe^x - e^x + 1)$

$\ln(xe^x - e^x + 1) = \ln 1$ معناه $f(x) - y = 0$

معناه : $xe^x - e^x + 1 = 1$

معناه : $e^x(x - 1) = 0$

معناه : $x = 1$ لأن $e^x > 0$

معناه $f(x) - y > 0$: $x > 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-	-	0	+
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1; -1)$	(C_f) فوق (Δ)

4 ا - حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln(x))$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x - 1 + e^{-x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \right) = 0$$

الاستنتاج: المنحنى (C_{ln}) هو منحنى مقارب للمنحنى (C_f)

بجوار $(+\infty)$

ب - الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_{ln}) على $]0; +\infty[$:

$$f(x) - \ln x = \ln \frac{x - 1 + e^{-x}}{x} = \ln \left(1 + \frac{-1 + e^{-x}}{x} \right)$$

من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا $-x < 0$ و منه $e^{-x} < 1$ إذن

$$1 + \frac{-1 + e^{-x}}{x} < 1 \quad \text{وهذا يكافئ} \quad \frac{-1 + e^{-x}}{x} < 0$$

$$\text{ومنه} \quad \ln \left(1 + \frac{-1 + e^{-x}}{x} \right) < 0 \quad \text{إذن} \quad f(x) - \ln x < 0$$

ومنه (C_f) يقع تحت (C_{ln}) على المجال $]0; +\infty[$

5 تبيان ان (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين

فاصلتهما α و β :

الدالة f مستمرة ورتبية تماما على $]-\infty; 0[$ و منه فهي

مستمرة ورتبية تماما على $]-1.2; -1.1[$ و

$$f(-1.1) = -0.10 \quad \text{و} \quad f(-1.2) = 0.11$$