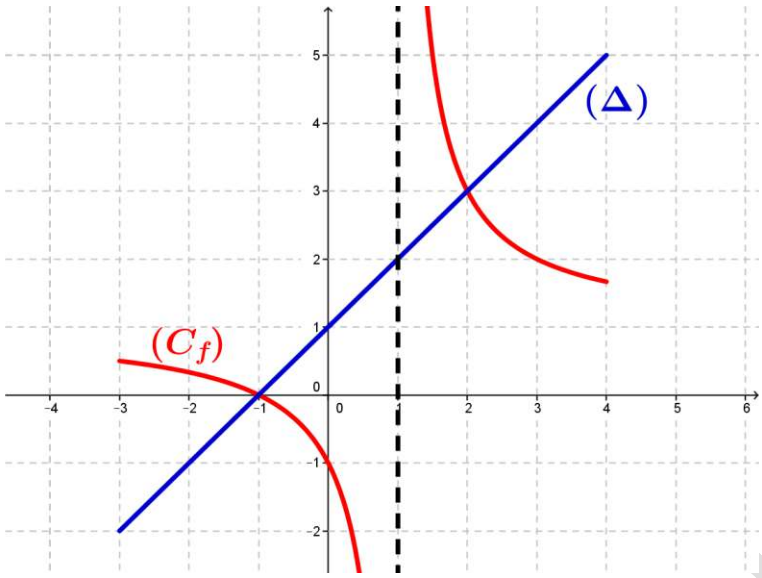
امتحان الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول (10 نقاط):

I) المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

في الشكل المقابل $\left(C_f\right)$ هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية: $D_f=[-3;1[\cup]1;4]$

و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+1$.



1) عين صورة لكل من العددين -1 و 3 بالدالة f .

2) عين سابقة العدد 2 بالدالة f .

3) شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) حل في المجموعة $[-3;1[\cup]1;4]$ المعادلة $f(x)=x+1$.

5) حدد إشارة $\dfrac{f(x)}{x+1}$ على المجموعة $[-3;-1[\cup]-1;1[$

II) تعطي عبارة الدالة f المعرفة سابقا على $D_f=[-3;1[\cup]1;4]$ بـ: $f(x)=\dfrac{x+a}{x-1}$ ، حيث a عدد حقيقي .

1) عين بيانيا $f(0)$ ثم استنتج قيمة a.

2) نضع فيما يأتي : $a=1$.

- بين من اجل كل عدد حقيقي x من D_f: $f(x)=1+\dfrac{2}{x-1}$.
- ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[-3;1[$ و المجال $]1;4]$.
- عين نقط تقاطع $\left(C_f\right)$ مع محوري الإحداثيات.
- بين من اجل كل عدد حقيقي x من $[-3;-1[\cup]-1;1[\cup]1;4]$: $\dfrac{f(x)}{x+1}=\dfrac{1}{x-1}$ ثم استنتج إشارة $\dfrac{f(x)}{x+1}$ على $[-3;-1[\cup]-1;1[\cup]1;4]$.

التمرين الثاني: (10 نقاط)

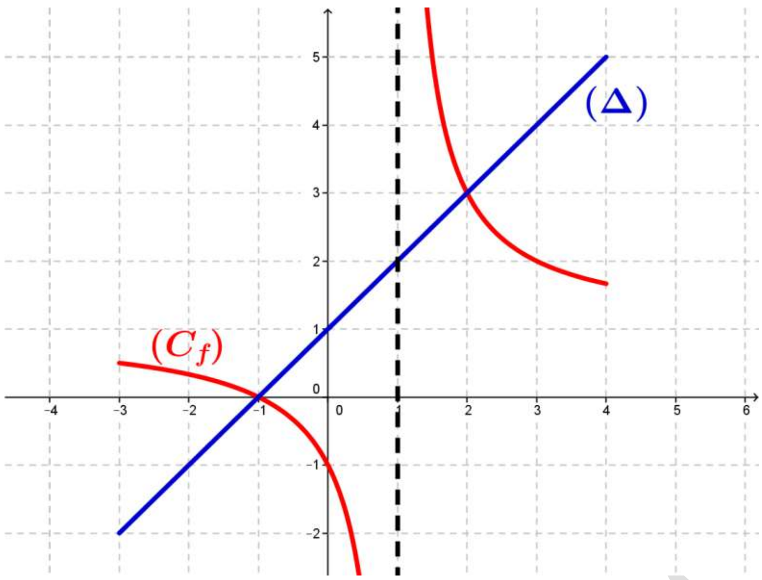
I) ABC مثلث كيفي .

1. أنشىء النقطة K حيث $\overrightarrow{BK}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ ثم بين أن $\overrightarrow{AK}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
2. أنشىء النقطة N حيث $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$
3. استنتج أن النقط A ، K و N في استقامية.

II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ نعتبر النقط A ، B، C حيث $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+2\vec{j}$ ، $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ و $C(2;3)$

1. عين احداثيي النقطة A ثم استنتج أن احداثيي النقطة B هي $B(1;3)$.
2. جد احداثيي النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.
3. احسب احداثيي النقطة N بحيث $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.
4. K نقطة فاصلتها $\dfrac{5}{3}$ عين ترتيبه النقطة K بحيث النقط A ، K و N في استقامية.
5. أكتب معادلة للمستقيم (AC) ثم استنتج معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة B و يوازي (AC) .

التمرين الأول (10 نقاط):



I) المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

في الشكل المقابل $\left(C_f\right)$ هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية: $D_f=\left[-3;1\right[\cup\left]1;4\right]$

و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+1$.

1) تعيين صور العددين -1 و 3 بالدالة f . $f(-1)=0$ و $f(3)=2$

2) تعين سابقة العدد 2 بالدالة f : هي $x=3$

3) تشكيل جدول تغيرات الدالة f .

x	-3	1	4
$f(x)$	↘	‖	↘

4) حل في المجموعة $\left[-3;1\right[\cup\left]1;4\right]$ المعادلة $f(x)=x+1$: معناه تعيين فواصل نقط تقاطع $\left(C_f\right)$ مع المستقيم (Δ) أي $S=\{-1;2\}$

5) حدد إشارة $\dfrac{f(x)}{x+1}$ على المجموعة $\left[-3;-1\right[\cup\left]-1;1\right[$: من التمثيل البياني:

x	-3	-1	1
$f(x)$	$+$	$-$	
$x+1$	$-$	$+$	
$\dfrac{f(x)}{x+1}$	$-$	$-$	

II) تعطي عبارة الدالة f المعرفة سابقا على $D_f=\left[-3;1\right[\cup\left]1;4\right]$ بـ: $f(x)=\dfrac{x+a}{x-1}$ ، حيث a عدد حقيقي .

1) عين بيانيا $f(0)$ ثم استنتج قيمة a.

من التمثيل البياني $f(0)=-1$ ومن جهة $f(0)=\dfrac{0+a}{0-1}=\dfrac{a}{-1}$ وبما أن $f(0)=-1$ أي $\dfrac{a}{-1}=-1$ ومنه $a=1$.

2) نضع فيما يأتي : $a=1$.

- تبين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من D_f: $f(x)=1+\dfrac{2}{x-1}$: $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x-1+2}{x-1}=\dfrac{x-1}{x-1}+\dfrac{2}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$
- دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $\left[-3;1\right[$ و المجال $\left]1;4\right]$.

أ. على المجال $\left[-3;1\right[$:

ليكن x_1 و x_2 من المجال $\left[-3;1\right[$ حيث $-3\le x_2<x_1<1$ بإضافة العدد -1 نجد $-4\le x_2-1<x_1-1<0$ يكافئ $\dfrac{1}{x_2-1}>\dfrac{1}{x_1-1}$

بالضرب في العدد 2 نجد $\dfrac{2}{x_1-1}>\dfrac{2}{x_2-1}$ باضافة العدد 1 نجد $1+\dfrac{2}{x_1-1}>1+\dfrac{2}{x_2-1}$ ومنه $f(x_1)>f(x_2)$ وعليه الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left[-3;1\right[$.

ب. على المجال $\left]1;4\right]$:

ليكن x_1 و x_2 من المجال $\left]1;4\right]$ حيث $1<x_2<x_1\le 4$ بإضافة العدد -1 نجد $0<x_2-1<x_1-1\le 5$ يكافئ $\dfrac{1}{x_1-1}>\dfrac{1}{x_2-1}$ بالضرب في العدد 2 نجد $\dfrac{2}{x_1-1}>\dfrac{2}{x_2-1}$ بإضافة العدد 1 نجد $1+\dfrac{2}{x_1-1}>1+\dfrac{2}{x_2-1}$ ومنه $f(x_1)>f(x_2)$ وعليه الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left]1;4\right]$.

• تعين نقط تقاطع $\left(C_f\right)$ مع محوري الإحداثيات.

أ. مع حامل محور الفواصل: نحل المعادلة $f\left(x\right)=0$

$f\left(x\right)=0$ معناه $\frac{x+1}{x-1}=0$ معناه $x+1=0$ معناه $x=-1$ وعليه احداثيي نقطة تقاطع $\left(C_f\right)$ مع حامل محور الفواصل هي $A\left(-1;0\right)$.

ب. مع حامل محور التراتيب: نحسب $f\left(0\right)$

$f\left(0\right)=\frac{0+1}{0-1}=-1$ وعليه احداثيي نقطة تقاطع $\left(C_f\right)$ مع حامل محور التراتيب هي $B\left(0;-1\right)$.

• تبين من اجل كل عدد حقيقي x من $\left[-3;-1\right[\cup\left]-1;1\right[\cup\left]1;4\right]$: $\frac{f\left(x\right)}{x+1}=\frac{1}{x-1}$

$$\frac{f\left(x\right)}{x+1}=\frac{\frac{x+1}{x-1}}{x+1}=\frac{x+1}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}=\frac{1}{x-1}$$

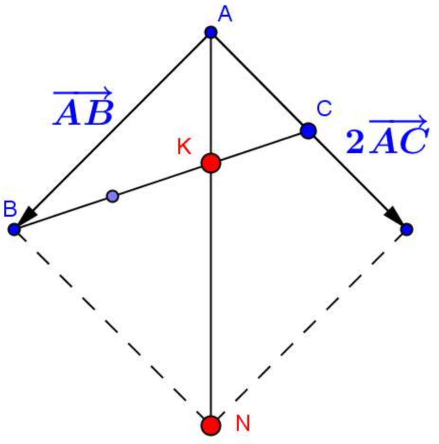
استنتاج إشارة $\frac{f\left(x\right)}{x+1}$ على $\left[-3;-1\right[\cup\left]-1;1\right[\cup\left]1;4\right]$: لدينا $\frac{f\left(x\right)}{x+1}=\frac{1}{x-1}$

x	-3	-1	1	4
1	$+$	$+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$+$	
$\frac{f\left(x\right)}{x+1}$	$-$	$-$	$+$	

التمرين الثاني: (10 نقاط)

I) ABC مثلث كيفي.

1. إنشاء النقطة K حيث $\overrightarrow{BK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.



• بين أن $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

لدينا $\overrightarrow{BK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ باستعمال علاقة شال نجد $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$ معناه

$$\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}$$

معناه $\overrightarrow{AK}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ معناه $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ....و ـ هـ ـ م

2. إنشاء النقطة N حيث $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

3. استنتاج أن النقط A، K و N في استقامية.

لدينا $\begin{cases}\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} & ....(1)\\ \overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC} & ....(2)\end{cases}$ بضرب العلاقة $\left(1\right)$ في العدد 3 نجد $3\overrightarrow{AK}=3\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

وعليه $3\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AN}$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{AN}$ مرتبطان خطيا ومنه المستقيمان $\left(AK\right)$ و $\left(AN\right)$ متوازيان ولهما نقطة مشتركة إذن المستقيمان $\left(AK\right)$ و $\left(AN\right)$ منطبقان وعليه النقط A، K و N في استقامية.

II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ نعتبر النقط A ، B ، C حيث $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+2\vec{j}$ ، $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ و $C(2;3)$

1. تعين احداثيي النقطة A ثم استنتج أن احداثيي النقطة B هي $B(1;3)$.

لدينا $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+2\vec{j}$ ومنه $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ومن جهة لدينا $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}x_A-x_O\\y_A-y_O\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ بالمطابقة نجد $x_A=1$ و $y_A=2$ ومنه $A(1;2)$

وكذلك لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ و من جهة لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$. ومنه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-1\\y_B-2\end{pmatrix}$ بالمطابقة نجد $x_B-1=0$ و $y_B-2=1$ وعليه

$x_B=1$ و $y_B=3$ إذن $B(1;3)$.

2. إيجاد إحداثيي النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

$ABCD$ متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ولدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}x_C-x_D\\y_C-y_D\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2-x_D\\3-y_D\end{pmatrix}$ و بما أن

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ أي $\begin{cases}2-x_D=0\\3-y_D=1\end{cases}$ ومنه $x_D=2$ و $y_D=2$ وعليه $D(2;2)$

3. حساب إحداثيي النقطة N بحيث $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ أي $2\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ إذن $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ ومن جهة $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}x_N-1\\y_N-2\end{pmatrix}$ أي $\begin{cases}x_N-1=2\\y_N-2=3\end{cases}$ ومنه $x_N=3$ و

$y_N=5$ وعليه $N(3;5)$

4. K نقطة فاصلتها $\frac{5}{3}$ عين ترتيبه النقطة K بحيث النقط A، K، N في استقامية.

النقط A، K، N في استقامية معناه الشعاعان $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\y_K-2\end{pmatrix}$ مرتبطان خطيا أي $(2)(y_K-2)-(3)\left(\frac{2}{3}\right)=0$ معناه

$2y_K-2-4=0$ معناه $y_K=3$ وعليه $K\left(\frac{5}{3};3\right)$

5. كتابة معادلة للمستقيم (AC)

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ شعاع توجيه للمستقيم (AC) و لتكن $M(x;y)$ نقطة من المستقيم (AC)

أي الشعاعان $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}$ مرتبطين خطيا أي

$(1)(y-2)-(1)(x-1)=0$ معناه $(AC):x-y+1=0$.

6. ثم استنتج معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة B و يوازي (AC).

بما أن $(AC)\,//\,(\Delta)$ أي $(\Delta):x-y+c=0$ و بما أن $B(1;3)\in(\Delta)$ أي احداثيات النقطة B تحقق معادلة المستقيم (Δ) أي $1-3+c=0$

أي $c=2$ ومنه $(\Delta):x-y+2=0$

انتهى...