| السنة الثالثة تقني رياضي هندسة كهربائية<br>المدة : 4 ساعات و نصف | اختبار بكالوريا تجريبي في<br>الرياضيات | ثانوية مليكة قايد – سطيف-<br>2021 -2022 |
|---|---|---|

على التلميذ الإجابة على أحد الموضوعين على الخيار

# الموضوع الأول:

**التمرين الأول( 4 ن):**

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0=\frac{1}{8}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=u_n(2-u_n)$

1) $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x(2-x)$

أ) ادرس اتجاه تغير الدالة $f$

ب) بين أنه إذا كان $x\in]0;1[$ فإن $f(x)\in]0;1[$

2) أ) أحسب كلا من $u_1$ و $u_2$

ب) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0<u_n<1$

جـ) بين أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة

3) $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ : $v_n=1-u_n$

أ) عبر عن $v_{n+1}$ بدلالة $v_n$

ب) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

جـ) استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

د) عين أصغر عدد طبيعي $n$ يحقق : $u_n>1-10^{-20}$

و) احسب بدلالة $n$ الجداء $p(n)$ حيث : $p(n)=v_0\times v_1\times.....\times v_n$ ، ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty}p(n)$

**التمرين الثاني( 4 ن ):**

1) عين حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الاقليدية للعدد $5^n$ على 7

2) استنتج باقي قسمة العدد $2020^{1441}+1962^{1954}+1954^{1962}$ على 7

3) بين أن من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $2020^{3n+1}+1962^{3n+1}+1954^{3n+1}\equiv 0[7]$

4) من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، نضع : $S_n=1+5+5^2+\ldots+5^n$

أ) بين أن من أجل كل عدد طبيعي $n$، $4S_n=5^{n+1}-1$

ب) نعتبر العدد الطبيعي $a$ ، بين أن $4S_n\equiv a[7]$ إذا و فقط إذا كان $S_n\equiv 2a[7]$

جـ) استنتج باقي قسمة $S_{2020}$ على 7

**التمرين الثالث( 4ن ):**

يحتوي كيس على ست كرات بيضاء تحمل الأرقام: 0 ؛ 0 ؛ 0 ؛ 1 ؛ 1 ؛ 2
و كرتين سوداوين تحملان الرقمين : 0 ؛ 1 . ( الكرات لا نميز بينها باللمس )

1) نسحب من الكيس عشوائيا كرتين على التوالي دون إرجاع
احسب احتمال كلا من الحدثين التاليين
$A$ : الحصول على كرتين من نفس اللون
$B$ : جداء العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين معدوم

2) نسحب الآن كرتين في آن واحد
أ) احسب احتمال الحادثة $C$ : مجموع العددين الذين تحملها الكرتان المسحوبتان عدد أولي
ب) ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب ، مجموع الرقمين المسجلين على الكرتين المسحوبتين
*) عين قانون احتمال $X$ ، واحسب أمله الرياضياتي
*) احسب $E\left(X^2\right)$

**التمرين الرابع( 8 ن ):**

I) $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة : $g(x)=2x^2+1-\ln|x|$

1) ادرس تغيرات الدالة $g$
2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$

II) $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=2x-2+\dfrac{\ln|x|}{x}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ . الوحدة $2\,cm$

1) أحسب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجموعة التعريف
2) بين أن من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$ : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$
3) بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y=2x-2$ مقارب للمنحني $(C_f)$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$
- أدرس الوضعية النسبية للمنحني $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$
4) أحسب $f(-x)+f(x)$ . ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة $\Omega(0,-2)$ ؟
5) بين أن $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يمر من النقطة $\Omega$ و يمس $(C_f)$ في نقطتين $A$ و $B$ يطلب تعيينهما
- أكتب معادلة ديكارتية للمماس $(T)$
6) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين أحدهما 1 و الآخر $\alpha$ حيث $-0{,}37<\alpha<-0{,}36$
7) أنشئ كلا من $(\Delta)$ ؛ $(T)$ و $(C_f)$
8) $(\Delta_m)$ المستقيمات التي معادلاتها : $y=mx-2$ حيث $m$ وسيط حقيقي
أ- بين أن جميع المستقيمات $(\Delta_m)$ تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها
ب- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=mx-2$
9) $\lambda$ عدد حقيقي حيث $\lambda>1$
أ- احسب بدلالة $\lambda$ و بـ $cm^2$ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta)$
و المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=1$ و $x=\lambda$
ب- عين قيمة العدد الحقيقي $\lambda$ بحيث يكون : $A(\lambda)=\dfrac{1}{2}cm^2$

# الموضوع الثاني

## التمرين الأول( 4,5 ن):

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_1=\sqrt{e}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

1) أحسب كلا من $u_2$ ، $u_3$ و $u_4$ ( تدور النتائج إلى $10^{-2}$ ) ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$

2) أ) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ يكون $u_n\leq n+3$

ب) بين أن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$

3) $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ : $v_n=u_n-n$

بين أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ، ثم بين أن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ :

$$u_n=n+\left(\sqrt{e}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ : $S_n=\left(\frac{2}{3}\right)v_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2v_2+......+\left(\frac{2}{3}\right)^nv_n$ ؛ $S'_n=u_1+u_2+.....+u_n$ و $T_n=\frac{S'_n}{n^2}$

عبر عن $S_n$ و $S'_n$ بدلالة $n$ ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

## التمرين الثاني( 4,5 ن):

1) نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $(E)............7x-3y=1$

أ- بين أن المعادلة $(E)$ تقبل على الأقل حلا

ب- حل المعادلة $(E)$

ج- برهن أنه إذا كانت الثنائية $(x,y)$ حلا للمعادلة $(E)$ فإن العددين : $x$ و $y$ أوليين فيما بينهما

2) ليكن $a$ و $b$ عددين صحيحين يحققان العلاقة : $(E')......7a-3b=29$

أ- ليكن $d$ القاسم المشترك الأكبر للعددين : $a$ و $b$

ما هي القيم الممكنة للعدد $d$ ؟

ب- عين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الصحيحة حلول الجملة : $\begin{cases}7a-3b=29\\ d=29\end{cases}$

ج- ليكن $m$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين : $a$ و $b$

حل الجملة : $\begin{cases}7a-3b=29\\ d=29\\ m=1044\end{cases}$

3) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ الجملة : $\begin{cases}7a-3b=29\\ pgcd(a;b)=1\end{cases}$

**التمرين الثالث( 4 ن ):**

عين في كل حالة مما يلي الإجابة الوحيدة الصحيحة مع التبرير :

1) المتتالية العددية $(U_n)$ المعرفة بـ: $U_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $U_{n+1} = 2U_n - n$ حدها العام على $\mathbb{N}$ هو :

أ) $U_n = 2^n + n + 1$ ب) $U_n = 2^n + n + 2$ جـ) $U_n = 2^n - n + 1$

2) $(U_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $2U_{n+1} = U_n + 2000$

نعرف على $\mathbb{N}$ المتتالية العددية $(V_n)$ كما يلي : $V_n = \frac{1}{2}U_n - \alpha$ حيث $\alpha$ عدد حقيقي

إن قيمة العدد الحقيقي $\alpha$ حتى تكون المتتالية $(V_n)$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ هي :

أ) $\alpha = 1000$ ب) $\alpha = 500$ جـ) $\alpha = -500$

3) إن مجموعة حلول المعادلة $ln(2e^x - 1) = 2x$ في $\mathbb{R}$ هي :

أ) $S = \{0\}$ ب) $S = \{0,1\}$ جـ) $S = \phi$

4) إن $\lim\limits_{x \to +\infty} ln\left(\frac{e^x - 3}{e^{2x} + 7}\right) + x$ تساوي

أ) $e$ ب) $1$ جـ) $0$

**التمرين الرابع ( 7ن) :**

I) $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x) = 1 + (1 - x)e^x$

1) ادرس تغيرات الدالة $g$ و شكل جدول تغيراتها

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $[0;+\infty[$

3) تحقق أن : $1,27 < \alpha < 1,28$ ، ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$

II) $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = \frac{e^x + x + 1}{e^x + 1}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ الوحدة $2\,cm$

1) بين أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ ثم فسر النتيجة بيانيا

2) أ- احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

ب- بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب للمنحني $(C_f)$

3) ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى كل من $(\Delta)$ و $(\Delta')$ حيث $y = 1$ معادلة لـ $(\Delta')$

4) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$

ب- بين أن $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$

5) أ- أثبت أن $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$

ب- أثبت أن $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ في النقطة $M(-\alpha, 0)$ موازيا للمستقيم $(\Delta)$

جـ- اكتب معادلة لـ $(T)$

6) أنشئ $(\Delta)$ ، $(\Delta')$ ، $(T)$ و $(C_f)$

7) $m$ وسيط حقيقي ، ناقش حسب قيم $m$ عدد حلول المعادلة : $f(x) = x + f(m)$

تصحيح باك تجريبي في الرياضيات

3 ت ر

الموضوع الأول

## التمرين الأول (04 ن)

$u_{n+1}=u_n(2-u_n)$ و $u_0=\frac{1}{8}$

① $D=\mathbb{R}$ ; $f(x)=x(2-x)$

أ) من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x)=-2x+2$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $-2x+2$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$f$ متزايدة تماما على $]0,1[$

ب) من أجل $x\in]0,1[$

$0<x<1$ و $f$ متزايدة تماما على $]0,1[$

$f(0)<f(x)<f(1)$ أي $0<f(x)<1$

أي $f(x)\in]0,1[$

② أ) $u_1=u_0(2-u_0)=f(u_0)=\frac{15}{64}$

$u_2=u_1(2-u_1)=f(u_1)=\frac{1655}{4096}$

ب) البرهان بالتراجع أن $0<u_n<1$

$0<u_0=\frac{1}{8}<1$ $n=0$

$P(0)$ صحيحة.

نفرض $P(n)$ صحيحة : $0<u_n<1$

نبرهن صحة $P(n+1)$ : $0<u_{n+1}<1$ ؟

$0<u_n<1$ و $f$ متزايدة تماما على $]0,1[$

فإن $f(0)<f(u_n)<f(1)$ أي

$0<u_{n+1}<1$ وهو المطلوب

من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0<u_n<1$

نقول إن $(u_n)$ محدودة

جـ) من أجل كل عدد طبيعي $n$ :

$u_{n+1}-u_n=u_n-u_n^2=u_n(1-u_n)$

$0<u_n<1$ ومنه $-1<-u_n<0$

ومنه $0<1-u_n<1$ اذن

$u_{n+1}-u_n>0$ أي $u_n(1-u_n)>0$

$(u_n)$ متزايدة تماما.

* $(u_n)$ متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة.

③ $v_n=1-u_n$

أ) لدينا

$v_{n+1}=1-u_{n+1}$

$=1-u_n(2-u_n)$

أي $v_{n+1}=1-2u_n+u_n^2$

$=(1-u_n)^2=v_n^2$

ب) البرهان بالتراجع أن : $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

$v_0=1-u_0=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ $n=0$

و $v_0=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^0}=\left(\frac{7}{8}\right)^1=\frac{7}{8}$ أي $P(0)$ صحيحة

نفرض $P(n)$ صحيحة : $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

نبرهن صحة $P(n+1)$ : $v_{n+1}=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$ ؟

لدينا $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$ ومنه $v_n^2=\left(\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}\right)^2$

أي $v_n^2=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n\times 2}$ أي $v_n^2=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$

في $v_{n+1}=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$ لأن $v_{n+1}=v_n^2$

من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

جـ) استنتاج عبارة $u_n$ بدلالة $n$

تعني $v_n=1-u_n$ ; $u_n=1-v_n$

$=1-\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}1-\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}=\boxed{1}$ $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}=0\end{cases}$ $\left(-1<\frac{7}{8}<1\right)$

د) أصغر عدد طبيعي $n$ يحقق : $u_n>1-10^{-20}$

تعني $1-\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}>1-10^{-20}$ تعني $\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}<10^{-20}$

تعني $\ln\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}<\ln10^{-20}$ تعني

تعني $2^n\ln\left(\frac{7}{8}\right)<-20\ln10$ تعني $2^n>\frac{-20\ln10}{\ln\frac{7}{8}}$

تعني $\ln2^n>\ln\left(\frac{-20\ln10}{\ln\frac{7}{8}}\right)$ تعني

أي $n\ln2>\ln\left(\frac{-20\ln10}{\ln\frac{7}{8}}\right)$ ; $n>\frac{\ln\left(\frac{-20\ln10}{\ln\frac{7}{8}}\right)}{\ln2}$

$n>5,11$ ومنه أصغر عدد طبيعي $n=6$

و) $P(n)=v_0\times v_1\times\cdots\times v_n$

$=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^0}\times\left(\frac{7}{8}\right)^{2^1}\times\cdots\times\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

$=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^0+2^1+\cdots+2^n}$

مجموع $n+1$ حد من متتالية هندسية

$=\left(\frac{7}{8}\right)^{1\left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right)}$

$P(n)=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}-1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}P(n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}-1}=0$ $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}2^{n+1}-1=+\infty\\ -1<\frac{7}{8}<1\end{cases}$

## التمرين ② (04 ن)

① بواقي قسمة $5^n$ على 7

$5^2\equiv4[7]$ $5^1\equiv5[7]$ $5^0\equiv1[7]$

$5^5\equiv3[7]$ $5^4\equiv2[7]$ $5^3\equiv6[7]$

$5^6\equiv1[7]$ البواقي دورية ودورها 6

| $n=$ | $6k$ | $6k+1$ | $6k+2$ | $6k+3$ | $6k+4$ | $6k+5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5^n\equiv$ | 1 | 5 | 4 | 6 | 2 | 3 | $[7]$ |

② استنتاج باقي قسمة

لدينا $A=2020^{1441}+1962^{1954}+1954^{1962}$ على 7

$2020\equiv4[7]$ ولدينا من (1) $5^2\equiv4[7]$

والخاصية إذا كان $a\equiv b[n]$ فإن $b\equiv a[n]$

منه $4\equiv5^2[7]$ اذن $2020\equiv5^2[7]$

ومنه $2020^{1441}\equiv(5^2)^{1441}[7]$

$\equiv5^{2882}[7]$

و $2882=6(480)+2$ الشكل $6k+2$

اذن $2020^{1441}\equiv4[7]$

$1962\equiv2[7]$ ولدينا من (1) $5^4\equiv2[7]$

ومنه $2\equiv5^4[7]$ اذن $1962\equiv5^4[7]$

اذن $1962^{1954}\equiv(5^4)^{1954}[7]$

$\equiv5^{7816}[7]$

و $7816\equiv6(1302)+4$ الشكل $6k+4$

اذن $1962^{1954}\equiv2[7]$

منه $1954\equiv1[7]$ : $1954^{1962}\equiv1[7]$

اذن $A\equiv4+2+1[7]$

$\equiv0[7]$

الباقي صفر 0

③ من أجل كل عدد طبيعي $n$ :

$2020^{3n+1}+1962^{3n+1}+1954^{3n+1}\equiv0[7]$ ؟

$2020^{3n+1}\equiv(5^2)^{3n+1}[7]$ لأن $2020\equiv5^2[7]$

$\equiv5^{6n+2}[7]$

$\equiv\boxed{4[7]}$

$1962^{3n+1}\equiv(5^4)^{3n+1}[7]$ لأن $1962\equiv5^4[7]$

$\equiv5^{12n+4}[7]$

$\equiv(5^{6n+2})^2[7]$

$\equiv4^2[7]$

$\equiv2[7]$

$1954^{3n+1}\equiv1[7]$ لأن $1954\equiv1[7]$

إذن $2020^{3n+1}+1962^{3n+1}+1954^{3n+1}\equiv 4+2+1\,[7]$

$\equiv 0\,[7]$

④ من أجل كل عدد طبيعي $n$ :

$S_n = 1+5+5^2+\dots+5^n$

$= 1\,\dfrac{5^{n+1}-1}{5-1}$

$S_n = \dfrac{5^{n+1}-1}{4}$

مجموع $n+1$ حد من متتالية هندسية

ومنه $4S_n = 5^{n+1}-1$

ب) $a$ عدد حقيقي :

$4S_n \equiv a\,[7]$ إذا وفقط إذا كان $S_n \equiv 2a\,[7]$

① إذا كان $4S_n \equiv a\,[7]$ فإن $8S_n \equiv 2a\,[7]$

و $8\equiv 1\,[7]$ فإن $S_n \equiv 2a\,[7]$

② إذا كان $S_n \equiv 2a\,[7]$ فإن $4S_n \equiv 8a\,[7]$

و $8\equiv 1\,[7]$ فإن $4S_n \equiv a\,[7]$

نستنتج أن $4S_n \equiv a\,[7]$ إذا وفقط إذا كان $S_n \equiv 2a\,[7]$

جـ) استنتاج باقي قسمة $S_{2020}$ على 7 .

لدينا $4S_n = 5^{n+1}-1$

ومنه $4S_{2020} = 5^{2021}-1$

لدينا $2021 = 6(336)+5$ من الشكل $6k+5$

إذن $4S_{2020} \equiv 3-1\,[7]$

$\equiv 2\,[7]$

$4S_{2020} \equiv 2\,[7]$ يكافئ أن $S_{2020} \equiv 4\,[7]$

ومنه الباقي هو : 4

---

## التمرين الثالث (04)

6 بيضاء ← 0, 0, 0, 1, 1, 2

2 سوداء ← 0, 1

8

① سحب كرتين على التوالي دون إرجاع

عدد الحالات $A_8^2 = 56$

حساب الاحتمال

$A$ : نفس اللون

$P(A) = \dfrac{A_6^2 + A_2^2}{56} = \dfrac{4}{7}$

$B$ : جداء العددين المسحوبين معدوم

$P(B) = \dfrac{A_4^2 + A_4^1 \times A_4^1 \times 2}{56}$

$= \dfrac{11}{14}$

$\begin{cases} 0\times 0 = 0 \\ 0\times \text{عدد} = 0 \end{cases}$

② سحب كرتين في آن واحد

عدد الحالات $C_8^2 = 28$

$C$ : مجموع العددين يكون أوليا

$P(C) = \dfrac{C_4^1 \times C_1^1 + C_3^2 + C_3^1 \times C_1^1}{28}$

$= \dfrac{5}{14}$

$\begin{cases} 0+2=2 \\ 1+1=2 \\ 1+2=3 \end{cases}$

ب) $X$ يرفق بكل نتيجة سحب مجموع العددين

قيم $X$ هي $\{0, 1, 2, 3\}$

قانون احتمال $X$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{3}{14}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{28}$ |

$P(X=0) = \dfrac{C_4^2}{28} = \dfrac{6}{28} = \dfrac{3}{14}$  $0+0=0$

$P(X=1) = \dfrac{C_4^1 \times C_3^1}{28} = \dfrac{12}{28} = \dfrac{3}{7}$  $0+1=1$

$P(X=2) = \dfrac{C_4^1 \times C_1^1 + C_3^2}{28} = \dfrac{7}{28} = \dfrac{1}{4}$  $\begin{cases} 0+2=2 \\ 1+1=2 \end{cases}$

$P(X=3) = \dfrac{C_3^1 \times C_1^1}{28} = \dfrac{3}{28}$  $1+2=3$

الأمل الرياضياتي

$E(X) = \sum_{i=1} p_i x_i = \dfrac{5}{4}$

$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2$

$= (0^2 \times \frac{3}{4}) + (1^2 \times \frac{3}{7}) + (2^2 \times \frac{1}{4}) + (3^2 \times \frac{3}{28})$

$E(X^2) = \dfrac{67}{28}$

---

## التمرين الرابع (08)

I) $g(x) = 2x^2+1-\ln|x|$

$D = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$

① دراسة تغيرات $g$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left[2+\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\ln(-x)}{(-x)^2}\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left[2+\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\ln x}{x^2}\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} g(x) = \lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} 2x^2+1-\ln|x| = +\infty$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x) = +\infty$

من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$

$g'(x) = 4x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{4x^2-1}{x} = \dfrac{(2x-1)(2x+1)}{x}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x^2-1$ | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| $x$ | | − | | − | ‖ | + | | + | |
| $g'(x)$ | | − | 0 | + | ‖ | − | 0 | + | |

$g$ متناقصة تماما على $]-\infty, -\frac{1}{2}]$ و $]0, \frac{1}{2}]$

و $g$ متزايدة تماما على $[-\frac{1}{2}, 0[$ و $[\frac{1}{2}, +\infty[$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | − | 0 | + | ‖ | − | 0 | + | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | 2,19 | ↗ $+\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | 2,19 | ↗ | $+\infty$ |

② إشارة $g(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | + | ‖ | + | |

II) $f(x) = 2x-2+\dfrac{\ln|x|}{x}$

$D = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$

① $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x-2-\dfrac{\ln(-x)}{(-x)} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2+\dfrac{\ln x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x) = -\infty$

$x=0$ معادلة مستقيم مقارب موازي لحامل محور التراتيب

② من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$

$f'(x) = 2+\dfrac{\frac{1}{x}x-\ln|x|}{x^2}$

$= 2+\dfrac{1-\ln|x|}{x^2} = \dfrac{2x^2+1-\ln|x|}{x^2}$

أي $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ ، إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

ومنه $f$ متزايدة تماما على $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | ‖ | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

3) $(\Delta)$ معادلته $y=2x-2$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-(2x-2) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{\ln|x|}{x} = 0$

$(\Delta)$ ذو المعادلة $y=2x-2$ م م مائل لـ $(\mathcal{C}_f)$

الوضعية النسبية لـ $(\mathcal{C}_f)$ و $(\Delta)$

$f(x)-(2x-2) = \dfrac{\ln|x|}{x}$

$\ln|x| = 0$ تعني $|x|=1$ تعني

$x=1$ أو $x=-1$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln\lvert x\rvert$ | | + | 0 | − | | − | 0 | + | |
| $x$ | | − | | − | 0 | + | | + | |
| $\frac{\ln\lvert x\rvert}{x}$ | | − | 0 | + | ‖ | − | 0 | + | |
| الوضع النسبي | | $(\mathcal{C}_f)$ تحت $(\Delta)$ | | $(\mathcal{C}_f)$ فوق $(\Delta)$ | ‖ | $(\mathcal{C}_f)$ تحت $(\Delta)$ | | $(\mathcal{C}_f)$ فوق $(\Delta)$ | |

نقطتا التقاطع لـ $(\mathcal{C}_f)$ ، $(\Delta)$ هما

$M_2(1, 0)$   $M_1(-1, -4)$

الأستاذ بن سعدي فوزي
ثانوية طلبة عمار باتنة 22
مع التوفيق لأبنائنا

من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$ ،

$$f(-x)+f(x)=\cancel{-2x}-2-\frac{\ln|x|}{x}+\cancel{2x}-2+\frac{\ln|x|}{x}$$
$$=-4$$

اذن النقطة $(0,-2)$ هي مركز تناظر $(C_f)$

⑤ $(C_f)$ يقبل مماسا يمر بالنقطة $\Omega$

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$
$$-2=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$$

لدينا

$$f(x_0)=2x_0-2+\frac{\ln|x_0|}{x_0}$$
$$f'(x_0)=\frac{2x_0^2+1-\ln|x_0|}{x_0^2}$$
$$-2=\frac{2x_0^2+1-\ln|x_0|}{x_0^2}(-x_0)+2x_0-2+\frac{\ln|x_0|}{x_0}$$
$$\cancel{-2}=\frac{-2x_0^2-1+\ln|x_0|}{x_0}+2x_0\cancel{-2}+\frac{\ln|x_0|}{x_0}$$
$$0=\frac{\cancel{-2x_0^2}-1+\ln|x_0|+\cancel{2x_0^2}+\ln|x_0|}{x_0}$$
$$\frac{2\ln|x_0|-1}{x_0}=0$$

يعني $2\ln|x_0|-1=0$ يعني $\ln|x_0|=\frac{1}{2}$

أي $|x_0|=e^{\frac{1}{2}}$ يعني $\begin{cases} x_0=\sqrt{e} \\ x_0=-\sqrt{e} \end{cases}$

النقطتان هما

$M_1\left(\sqrt{e},2\sqrt{e}-2+\frac{\sqrt{e}}{2e}\right)$ $M_2\left(-\sqrt{e},-2\sqrt{e}-2+\frac{\sqrt{e}}{2e}\right)$

المعادلة : $(T)$ $f'(\sqrt{e})=2+\frac{1}{2e}$

$$y=\left(2+\frac{1}{2e}\right)(x-\sqrt{e})+2\sqrt{e}-2+\frac{\sqrt{e}}{2e}$$

$\boxed{y=\left(2+\frac{1}{2e}\right)x-2}$

| $x$ | 0 | $\sqrt{e}$ |
|---|---|---|
| $y$ | -2 | 1,6 |

⑥ $f(x)=0$ تقبل حلين .

(*) $f$ مستمرة ومتزايدة تماما على $]0,+\infty[$

$f(1)=0$ اذن 1 حل وحيد على $]0,+\infty[$

(*) $f$ مستمرة ومتزايدة تماما على $[-0,37;-0,36]$

$f(-0,36)=0,1179$ $f(-0,37)=-0,052$

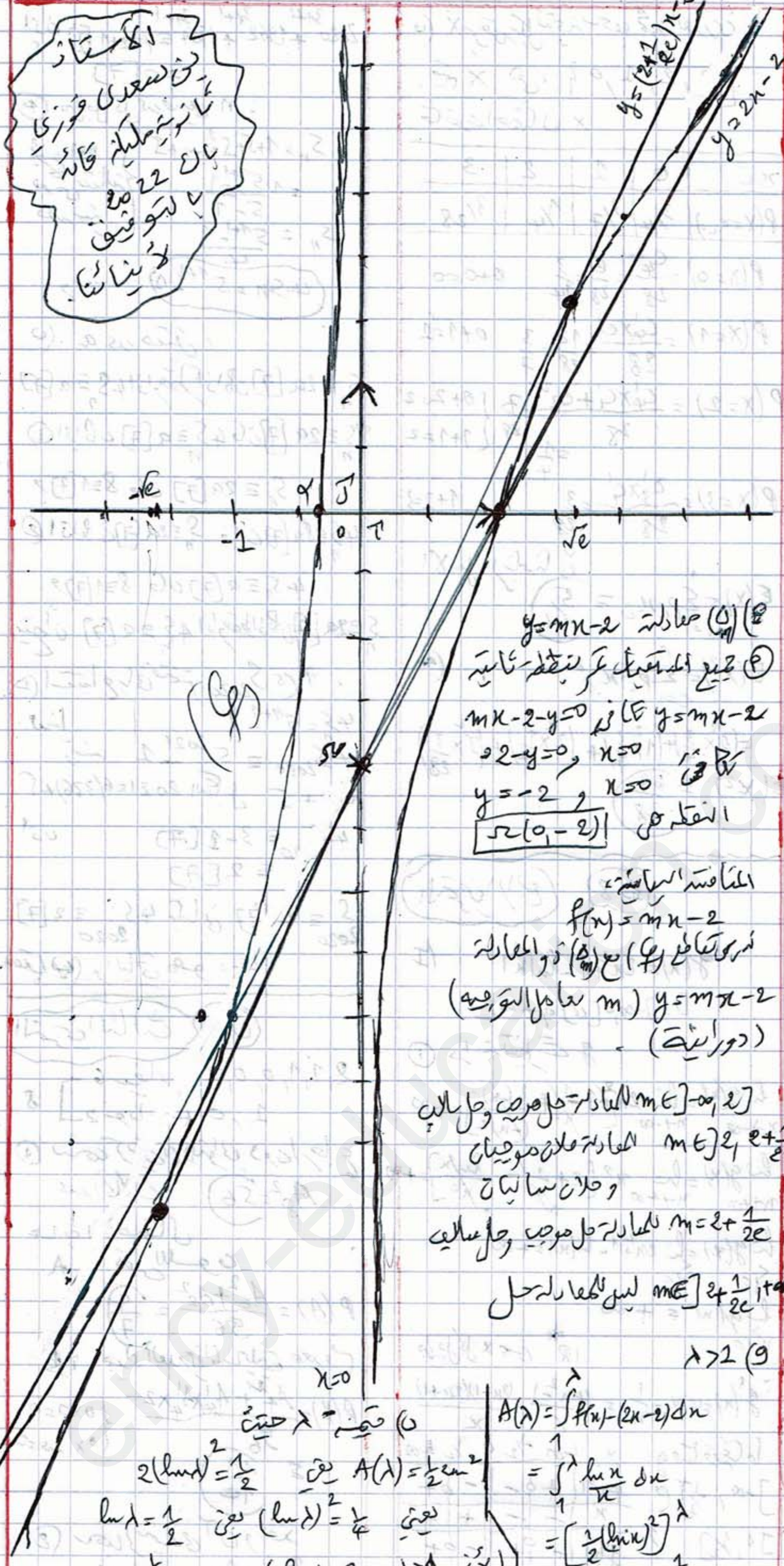
$$f(-0,37)\times f(-0,36)<0$$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد $-0,37<\alpha<-0,36$ يحقق $f(\alpha)=0$

⑦ الرسم

نقط مساعدة .

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -8,4 | -6,3 | -4 | 0 | 2,35 | 4,37 |




⑧ $(\Delta_m)$ معادلة $y=mx-2$

جميع المستقيمات تمر بنقطة ثابتة

$y=mx-2$ أي $mx-2-y=0$

تحقق $x=0$ و $-2-y=0$

$x=0$ و $y=-2$

النقطة هي $\boxed{\Omega(0,-2)}$

المناقشة البيانية :

$$f(x)=mx-2$$

ندرس تقاطع $(C_f)$ مع $(\Delta_m)$ ذو المعادلة $y=mx-2$ ( $m$ معامل التوجيه ) ( دورانية ) .

$m\in]-\infty,2]$ للمعادلة حل موجب وحل سالب

$m\in]2,2+\frac{1}{2e}[$ المعادلة حلان موجبان وحلان سالبان

$m=2+\frac{1}{2e}$ للمعادلة حل موجب وحل سالب

$m\in]2+\frac{1}{2e},+\infty[$ ليس للمعادلة حل

⑨ $\lambda>1$

$$A(\lambda)=\int_1^{\lambda}f(x)-(2x-2)\,dx$$
$$=\int_1^{\lambda}\frac{\ln x}{x}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\lambda}$$
$$=\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2-\frac{1}{2}(\ln 1)^2$$

$A(\lambda)=\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2$ u.a

و بـ $cm^2$ نجد

$$A(\lambda)=4\times\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2=2(\ln\lambda)^2\,cm^2$$

⑩ تعيين $\lambda$ حيث

$A(\lambda)=\frac{1}{2}cm^2$ يعني $2(\ln\lambda)^2=\frac{1}{2}$

يعني $(\ln\lambda)^2=\frac{1}{4}$ يعني $\ln\lambda=\frac{1}{2}$

(لأن $\lambda>1$ , $\ln\lambda>0$) يعني $\lambda=e^{\frac{1}{2}}$

$\boxed{\lambda=\sqrt{e}}$

تصحيح امتحان تجريبي في الرياضيات

3 ت ر

الموضوع الثاني.

**التمرين الأول (04,5)**

$u_1=\sqrt e$ و $u_{n+1}=\frac23 u_n+\frac13 n+1$

① $u_2=\frac23 u_1+\frac13+1=2{,}43$

$u_3=\frac23 u_2+\frac23+1=3{,}29$

$u_4=\frac23 u_3+\frac33+1=4{,}19$

التخمين: $(u_n)$ متزايدة

② أ) البرهان بالتراجع: $n\ge1$: $u_n\le n+3$

$n=1$: $u_1=\sqrt e$

$1+3=4$

$\sqrt e\le 4$ و $P(1)$ صحيحة

نفرض أن $P(n)$ صحيحة: $u_n\le n+3$

نبرهن صحة $P(n+1)$: $u_{n+1}\le n+4$ ؟

$u_n\le n+3$ ومنه $\frac23 u_n\le \frac23 n+2$

ومنه $\frac23 u_n+\frac13 n+1\le\frac23 n+2+\frac13 n+1$

ومنه $u_{n+1}\le n+3$

و $n+3<n+4$

إذن $u_{n+1}\le n+4$

من أجل كل عدد طبيعي $n\ge1$ ؛ $u_n\le n+3$

ب) من أجل كل $n\ge1$

$u_{n+1}-u_n=\frac23u_n+\frac13n+1-u_n$

$=-\frac13u_n+\frac13n+1$

$=\frac13(n+3-u_n)$

لأن $u_n\le n+3$ يعني $n+3-u_n\ge0$

ومنه $u_{n+1}-u_n\ge0$ أي $(u_n)$ متزايدة

③ من أجل كل $n\ge1$: $v_n=u_n-n$

$(v_n)$ هندسية يعني $v_{n+1}=v_n\times q$

$v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)$

$=\frac23u_n+\frac13n+\cancel{1}-n-\cancel{1}$

$=\frac23u_n-\frac23n$

$=\frac23(u_n-n)=\frac23 v_n$

$(v_n)$ هندسية أساسها $q=\frac23$، حدها الأول $v_1=u_1-1=\sqrt e-1$

تبيين أن: $u_n=n+(\sqrt e-1)\left(\frac23\right)^{n-1}$ ؟

لدينا أن $v_n=v_1\times q^{n-1}$

$=(\sqrt e-1)\left(\frac23\right)^{n-1}$

$v_n=u_n-n$ أي $u_n=v_n+n$ ومنه

$u_n=n+(\sqrt e-1)\left(\frac23\right)^{n-1}$

④ $S_n=\frac23v_1+\left(\frac23\right)^2v_2+\dots+\left(\frac23\right)^n v_n$

نضع $w_n=\left(\frac23\right)^n v_n$

لدينا $w_{n+1}=\left(\frac23\right)^{n+1}v_{n+1}$

$=\left(\frac23\right)^{n+1}\times\frac23 v_n$

$=\left(\frac23\right)^n\times\frac23\times\frac23 v_n$

$=\frac49\left[\left(\frac23\right)^n v_n\right]=\frac49 w_n$

$(w_n)$ هندسية أساسها $q'=\frac49$ حدها الأول $w_1=\frac23 v_1=\frac23(\sqrt e-1)$

$S_n=w_1+w_2+\dots+w_n$

$=w_1\left[\frac{1-q'^n}{1-q'}\right]$

$=\frac23(\sqrt e-1)\left[\frac{1-(4/9)^n}{1-4/9}\right]$

$S_n=\frac65(\sqrt e-1)\left(1-\left(\frac49\right)^n\right)$

$S'_n=u_1+u_2+\dots+u_n$ $[u_n=v_n+n]$

$=(v_1+1)+(v_2+2)+\dots+(v_n+n)$

$=(v_1+v_2+\dots+v_n)+\underbrace{(1+2+\dots+n)}_{\text{حسابية}}$

$=v_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)+\frac{n(n+1)}{2}$

$=(\sqrt e-1)\left(\frac{1-(2/3)^n}{1-2/3}\right)+\frac{n(n+1)}{2}$

$S'_n=3(\sqrt e-1)(1-(2/3)^n)+\frac{n(n+1)}{2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} T_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S'_n}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3(\sqrt e-1)(1-(2/3)^n)}{n^2}+\frac{n(n+1)}{2n^2}$

$=0+\frac12=\frac12$

**التمرين الثاني (04,5)**

① $(E)$: $7y-3x=1$

أ) لدينا $PGCD(7,3)=1$ و $1|1$

فإن المعادلة $(E)$ تقبل على الأقل حلا في $\mathbb Z\times\mathbb Z$

ب) حل المعادلة $(E)$

لدينا $(1,2)$ حل لـ $(E)$ لأن

$7(1)-3(2)=1$ ومنه

$\begin{cases}7x-3y=1\\7(1)-3(2)=1\end{cases}$ أي $7x-3y=7(1)-3(2)$

نجد $7(x-1)=3(y-2)$

$7|3(y-2)$ و $PGCD(7,3)=1$

حسب غوص $7|y-2$ أي $y-2=7k$

ومنه $y=7k+2$

و $7(x-1)=3(7k)$ أي

$x-1=3k$ ومنه $x=3k+2$

$S=\{(3k+1,7k+2),k\in\mathbb Z\}$

جـ) إذا كانت $(x,y)$ حلا لـ $(E)$

هذا يعني $7x-3y=1$، حسب

نظرية بيزو يكون $x$ و $y$ أوليين فيما بينهما

② $a$، $b$ عددان صحيحان طبيعيان

$(E')$ — $7a-3b=29$

أ) $PGCD(a,b)=d$

$\begin{cases}d|a\\d|b\end{cases}$ لدينا $\begin{cases}d|7a\\d|3b\end{cases}$

ومنه $d|7a-3b$ أي $d|29$

ومنه $d\in\{1;29\}$

ب) الثنائيات الصحيحة $(a,b)$ حيث

$\begin{cases}7a-3b=29\\d=29\end{cases}$

لدينا $d=29$ يعني يوجد $a'$ و $b'$

صحيحان $a=29a'$ و $b=29b'$

حيث $PGCD(a',b')=1$ لدينا

$7(29a')-3(29b')=29$

أي $7a'-3b'=1$

ومن السؤال 1) ب) نجد

$a'=3k+1$ و $b'=7k+2$

إذن $a=87k+29$

$b=203k+58$

$S=\{(87k+29,203k+58)/k\in\mathbb Z\}$

جـ) $PPCM(a,b)=m$

$m=\frac{a\times b}{d}=\frac{29a'\times29b'}{29}=29a'b'$

لدينا الجملة
$\begin{cases}7a-3b=29\\ d=29\\ m=1044\end{cases}$ أي

معناه $a'\times b'\times 29=1044$ أي $\boxed{a'\times b'=36}$

ولدينا $7a-3b=29$ تكافئ $\boxed{7a'-3b'=1}$

$a'\times b'=36$ تكافئ $a'=\frac{36}{b'}$ ومنه

$7\left(\frac{36}{b'}\right)-3b'=1$

تكافئ $\frac{-3b'^2+252}{b'}=1$

تكافئ $-3b'^2-b'+252=0$

$\Delta=3025$ ، $b'_1=9$ مقبول ، $b'_2=-\frac{28}{3}$ مرفوض

$b'=9$ تكافئ $a'=4$ ومنه

$a=116$ ، $b=261$

$S=\{(116,261)\}$

③ حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ $\begin{cases}7a-3b=29\\ PGCD(a,b)=1\end{cases}$

$7a-3b=29$ تكافئ $7a=29+3b$

$7a\equiv 29[3]$ تكافئ $a\equiv 2[3]$

أي $\boxed{a=3\alpha+2}$ ومنه

إذن $7(3\alpha+2)=29+3b$

أي $7(3\alpha)-15=3b$

$7\alpha-5=b$

$\boxed{b=7\alpha-5}$ $(\alpha\in\mathbb{Z})$

لدينا $PGCD(a,b)=1$

باستعمال خوارزمية إقليدس لدينا

$PGCD(a,b)=PGCD(b,r)$

$7\alpha-5=2(3\alpha+2)+\alpha-9$

$3\alpha+2=3(\alpha-9)+29$

$PGCD(7\alpha-5,3\alpha+2)=PGCD(\alpha-9,29)$

ولدينا $PGCD(a,b)=1$

معناه $PGCD(\alpha-9,29)=1$

أي $\alpha-9\not\equiv 0[29]$ أي $\alpha\not\equiv 9[29]$

$S=\{(3\alpha+2,7\alpha-5);\ \alpha\in\mathbb{Z},\ \alpha\not\equiv 9[29]\}$

## التمرين 3 (4ن)

① $u_0=2$ و $u_{n+1}=2u_n-n$

(P): $u_n=2^n+n+1$

$u_{n+1}-2u_n=2^{n+1}+n+1+1-2(2^n+n+1)$

$=\cancel{2^{n+1}}+n+2-\cancel{2^{n+1}}-2n-2$

$=\boxed{-n}$

② $v_n=\frac12 u_n-\alpha$ و $2u_{n+1}=u_n+2000$

(P): $\boxed{\alpha=1000}$

$v_{n+1}=\frac12 u_{n+1}-\alpha$

$=\frac12\left(\frac12 u_n+1000\right)-\alpha$

$=\frac12\left[\frac12 u_n+1000-2\alpha\right]$

$=\frac12\left(\frac12 u_n-\alpha+1000-\alpha\right)$

$=\frac12 v_n+\frac{1000-\alpha}{2}$

$(v_n)$ هندسية إذا وفقط إذا كان $1000-\alpha=0$ ومنه $\alpha=1000$

③ مجموعة حلول المعادلة

$\ln(2e^x-1)=2x$ هي $S=\{0\}$ (P)

تكون المعادلة معرفة حيث $2e^x-1>0$

أي $2e^x>1$ أي $e^x>\frac12$

أي $x>\ln\frac12$ ، $D=]\ln\frac12;+\infty[$

$\ln(2e^x-1)=2x$ تكافئ $2e^x-1=e^{2x}$

تكافئ $e^{2x}-2e^x+1=0$ أي

$(e^x-1)^2=0$ تكافئ $e^x-1=0$

أي $e^x=1$ أي $\boxed{x=0}$

④ $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x-3}{e^{2x}+7}\right)+x$

تساوي $\boxed{0}$

$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x-3}{e^{2x}+7}\right)+x=$

$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x-3}{e^{2x}+7}\right)+\ln(e^x)$

$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x-3}{e^{2x}+7}\times e^x\right)$

$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{2x}-3e^x}{e^{2x}+7}\right)$

$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{2x}(1-3e^{-x})}{e^{2x}(1+e^{-2x})}\right)$

$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1-3e^{-x}}{1+e^{-2x}}\right)$

$=\ln 1=0$

## التمرين الرابع (7ن)

I) $g(x)=1+(1-x)e^x$ ، $D=]-\infty;+\infty[$

① دراسة تغيرات $g$

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}1+e^x-xe^x=1$

$\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$

$g'(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $-x$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | | |
| $g(x)$ | $1$ | ↗ | $2$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-\infty$ |

② لدينا $g$ مستمرة ومتناقصة تماما على $[0;+\infty[$ و $2\times\lim_{x\to+\infty}g(x)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة

$g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $[0,+\infty[$

③ لدينا $g(1,27)=0,038$

$g(1,28)=-0,007$

إذن $g(1,27)\times g(1,28)<0$

$g(\alpha)=0$ يعني $1,27<\alpha<1,28$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

II) $f(x)=\frac{e^x+x+1}{e^x+1}$

$D=]-\infty,+\infty[$

① $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1+\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+xe^{-x}+e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$=\boxed{1}$

$y=1$ معادلة م م أفقي

② $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x+1}{e^x+1}=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)-(x+1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x+1}{e^x+1}-(x+1)$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{e^x}+\cancel{x}+\cancel{1}-xe^x-\cancel{e^x}-\cancel{x}-\cancel{1}}{e^x+1}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-xe^x}{e^x+1}=0$

إذن $(\Delta)$ معادلته $y=x+1$ م م مائل لـ $(C_f)$ عند $-\infty$

③ الوضع النسبي لـ $(C_f)$ و $(\Delta)$

$f(x)-(x+1)=\frac{-xe^x}{e^x+1}$

الإشارة من إشارة $-x$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| الوضع النسبي | | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | |

$(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في $A(0,1)$

الوضع النسبي لـ $(C_f)$ و $(\Delta')$ ذو المعادلة $y=1$

$f(x)-1=\dfrac{x}{e^x+1}$ إشارته من إشارة $x$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| الوضع النسبي | | $(C_f)$ تحت $(\Delta')$ | | $(C_f)$ فوق $(\Delta')$ | |

$(C_f)$ يقطع $(\Delta')$ في $A(0,1)$

4) أ) من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{(e^x+1)(e^x+1)-e^x(e^x+x+1)}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{\cancel{e^{2x}}+2e^x+1-\cancel{e^{2x}}-xe^x-e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{1+(1-x)e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

$f$ متزايدة تماما على $]-\infty,\alpha]$

$f$ متناقصة تماما على $[\alpha,+\infty[$

ب) $f(\alpha)=\alpha$ ؟

لدينا $f(\alpha)=\dfrac{e^\alpha+\alpha+1}{e^\alpha+1}$ و $g(\alpha)=0$

يعني $1+(1-\alpha)e^\alpha=0$ أي $(1-\alpha)e^\alpha=-1$

أي $e^\alpha=\dfrac{-1}{1-\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$

$$f(\alpha)=\frac{\frac{1}{\alpha-1}+\alpha+1}{\frac{1}{\alpha-1}+1}=\frac{\frac{\alpha^2}{\alpha-1}}{\frac{\alpha}{\alpha-1}}=\frac{\alpha^2}{\alpha}=\boxed{\alpha}$$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $1$ | $\nearrow$ | $\alpha$ | $\searrow$ | $1$ |

5) أ) $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$

$f(-\alpha)=\dfrac{e^{-\alpha}-\alpha+1}{e^{-\alpha}+1}$ و $e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha-1}$

يعني $\dfrac{1}{e^\alpha}=\alpha-1$

يعني $e^{-\alpha}=\alpha-1$

$=\dfrac{\alpha-1-\alpha+1}{\alpha-1+1}$

$=0$

إذن $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $M(-\alpha,0)$

ب) $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ في $M(-\alpha,0)$ يوازي $(\Delta)$

$$f'(-\alpha)=\frac{g(-\alpha)}{(e^{-\alpha}+1)^2}=\frac{1+(1+\alpha)e^{-\alpha}}{(e^{-\alpha}+1)^2}=\frac{1+(1+\alpha)(\alpha-1)}{(e^{-\alpha}+1)^2}$$

$$f'(-\alpha)=\frac{\alpha^2}{(\alpha-1+1)^2}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2}=\boxed{1}$$

$(T)$ مماس $(C_f)$ في $M(-\alpha,0)$ يوازي $(\Delta)$ لأن لهما نفس معامل التوجيه: 1

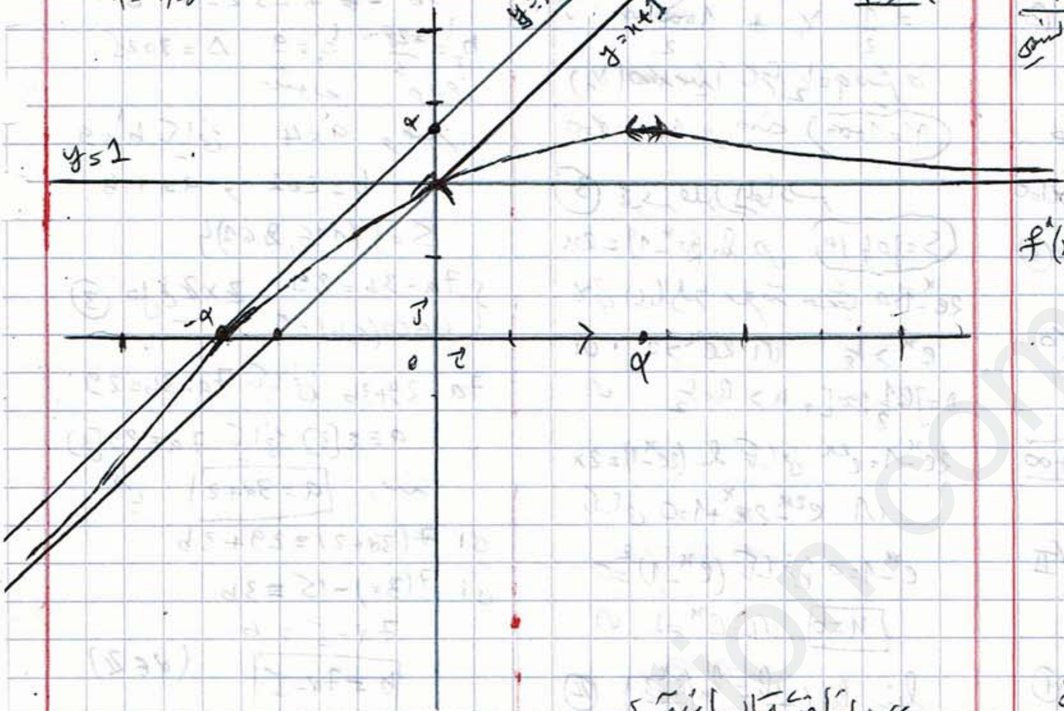
ج) معادلة لـ $(T)$

$y=f'(-\alpha)(x+\alpha)+f(-\alpha)=\boxed{x+\alpha}$

| $x$ | $-\alpha$ | $0$ |
|---|---|---|
| $y$ | $0$ | $\alpha$ |

$\alpha=1{,}28$

6) الرسم:




6) المناقشة البيانية:

$f(x)=x+f(m)$

ندرس تقاطع $(C_f)$ مع المستقيم ذو المعادلة $y=x+f(m)$ الموازي لكل من $(\Delta)$ و $(T)$

* $f(m)<1$ يعني $m<0$ للمعادلة حل واحد موجب
* $f(m)=1$ يعني $m=0$ للمعادلة حل واحد معدوم
* $1<f(m)<\alpha$ أي $m\in]0,\alpha[\cup]\alpha,+\infty[$ للمعادلة حلين سالبين
* $f(m)=\alpha$ أي $m=\alpha$ للمعادلة حل مضاعف $x=-\alpha$

الأستاذ: بن لسعدي فوزي

ثانوية ملكية قايد - سطيف -

سنة 2022

بالتوفيق لأبنائنا