

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

- نعتبر v_1 و q عدنان طبيعيين ، (v_n) هي المتتالية الهندسية التي أساسها q و حدها الأول v_1 .
I عين v_1 و q علما أن v_1 و q أوليان فيما بينهما و $2v_1^2 = v_4 - v_2$.
II نفرض أن: $v_1 = 3$ و $q = 2$.

- 1 أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثم عين كل الحدود المحصورة بين العددين: 2020 و 1441 .
2 نضع: $S_n = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$ و $P_n = \ln(S_n)$.
- أحسب كلا من S_n و P_n بدلالة n ، ثم أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.
3 نعتبر α و β عدنان طبيعيين حيث: $v_\alpha < v_\beta$.
أ) حلل العدد 2304 إلى جداء عوامل أولية.

ب) عين كل الثنائيات الطبيعية (α, β) بحيث يكون:

$$\begin{cases} v_\alpha \times v_\beta = 2304 \\ PGCD(\alpha, \beta) = 2 \end{cases}$$

- ج) نسجل قيم الحدود الستة الأولى للمتتالية (v_n) على 6 بطاقات متماثلة ونخلطها جيدا ثم نسحب منها بصفة عشوائية بطاقتان في آن واحد.

- ما هو احتمال سحب بطاقتين تحملان حدين رقميهما أوليان فيما بينهما ؟

التمرين الثاني : (04 نقاط)

- 1 أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .
ب) استنتج باقي قسمة العدد $1440^{2019} 2020$ على 7 .
2 عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $4(5^{n-2} + 5^{n-3} + \dots + 1) \equiv 3[7]$.
3 أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = 2n^2 + 6n + 6$.
ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد: $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2$ مضاعفا للعدد 7 .
4) فيما يلي نفرض: $n = 9$.
نعتبر x و y عددين صحيحين ولتكن المعادلة (E) حيث: $C_{10}^2 x - A_{12}^2 y = 15 \dots (E)$.
أ) عين $PGCD(C_{10}^2; A_{12}^2)$ ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا (x, y) .
ب) بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E) فإن: $y \equiv 0[5]$ ، ثم حل المعادلة (E) .
5) أ) إذا كان x و y عددين طبيعيين ، ما هي القيم الممكنة لـ d حيث: $d = PGCD(x, y)$.
ب) عين الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) بحيث يكونا العددين x و y أوليان فيما بينهما .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس (O, \vec{u}, \vec{v}) . نعتبر النقطتين M و M' اللتين لاحقتاهما z و z' على الترتيب. نضع $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ حيث x, y, x', y' أعداد حقيقية.
- نذكر أن \bar{z} هو مرافق العدد المركب z و $|z|$ هي طويلة العدد المركب z .
- (1) بين أن الشعاعين \overline{OM} و $\overline{OM'}$ متعامدين إذا وفقط إذا كان $\operatorname{Re}(z'\bar{z}) = 0$.
- (2) بين أن النقط O, M و M' في استقامة إذا وفقط إذا كان $\operatorname{Im}(z'\bar{z}) = 0$.
- (3) لنكن N النقطة ذات اللاحة $z^2 - 1$. عين مجموعة النقط M ذات اللاحة z التي يكون من أجلها الشعاعين \overline{OM} و \overline{ON} متعامدين.
- (4) لنكن P النقطة ذات اللاحة $\frac{1}{z^2} - 1$ حيث $z \neq 0$.
- (أ) بين أن $\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) \overline{\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)} = -z^2 \left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2$.
- (ب) عين مجموعة النقط M ذات اللاحة z التي تكون من أجلها النقط O, N و P في استقامة.

التمرين الرابع : (07.5 نقاط)

- (1) نعتبر g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^* كما يلي: $g(x) = x^2 - \ln(x^2)$.
- (1) أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.
- (2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x يكون: $g(x) > 0$.
- (II) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^* بـ: $f(x) = \frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) (أ) أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (ب) أحسب: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ، ثم فسر النتائج بيانيا.
- (2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من \mathbb{R}^* تكون: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
- (ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
- (ج) برهن أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) ذو المعادلة $y = x$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .
- (3) (أ) تحقق أنه من أجل كل x من \mathbb{R}^* ، \mathbb{R}^* و $-x \in \mathbb{R}^*$ ، $f(x) + f(-x) = 0$ ، ماذا تستنتج؟ فسر النتيجة بيانيا.
- (ب) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,3 < \alpha < 0,4$ ، ثم استنتج أنها تقبل حلا آخر β يطلب تعيين حصر له.
- (4) (أ) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلتيهما.
- (ب) أنشئ كلا من: (T_1) ، (T_2) ، (Δ) و المنحني (C_f) .

5) نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ بالعبارة: $h(x) = \left[\frac{\ln(x+1)^2}{x+1} + (x+1) + \frac{2}{x+1} \right] + 2$

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- بين أنه يوجد تحويل نقطي يحول المنحني (C_f) إلى المنحني (C_h) . (الإثبات غير مطلوب)

6) أ) بين أن الدالة F المعرفة على \mathbb{R}^* بـ: $F(x) = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}(\ln x^2)^2 + 2\ln|x| \right]$ هي دالة أصلية لـ f على \mathbb{R}^* .

ب) عين دالة أصلية للدالة f والتي تتعدم من أجل $x = 1$.

ج) نعتبر λ عدد حقيقي حيث $\lambda > 1$. أحسب التكامل: $I = \int_1^\lambda f(x) dx$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

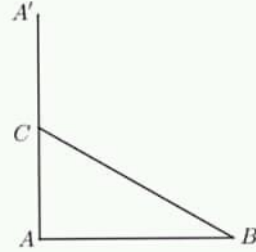
التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 5 و ست كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 3 ، 4 ، 4 . لا نفرق بينها عند اللمس .
نسحب من الكيس كرتين على التوالي دون إرجاع .

- (1) ما هو عدد الحالات الممكنة للسحب.
- (2) أحسب احتمال سحب كرتين من نفس اللون .
- (3) أحسب احتمال سحب كرتين تحملان رقمين زوجيين .
- (4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل حالة سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة .
(أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .
(ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

I . ABC مثلث مباشر قائم في A حيث $(\overline{BC}; \overline{BA}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$ (أنظر الشكل)



A' نظيرة A بالنسبة للنقطة C . ليكن S التشابه المباشر الذي يحول A' إلى C و C إلى B .

- (1) عين نسبة وزاوية التشابه S .
 - (2) أنشئ D صورة A بواسطة S .
 - (3) ليكن Ω مركز التشابه المباشر S .
(أ) أثبت أن المستقيمين (ΩC) و (BC) متعامدان .
(ب) أثبت أن المستقيمين $(\Omega A')$ و (CA') متعامدان .
(ج) استنتج طريقة لإنشاء النقطة Ω .
- II . فيما يلي المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(A; \vec{u}; \vec{v})$ حيث لاحقة B هي 1 .
- (1) عين لاحقة كل من A' و C .
 - (2) بين أن العبارة المركبة للتشابه المباشر S هي $z' = (1 + i\sqrt{3})z + \frac{6 - i\sqrt{3}}{3}$ ، ثم استنتج لاحقة Ω .
 - (3) عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\arg\left(z - 2i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

متتاليتنا الأعداد الطبيعية (x_n) و (y_n) معرفتان على \mathbb{N} كما يلي $\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$

- (1) أثبت بالتراجع من أجل كل طبيعي n أن $x_n = 2^{n+1} + 1$.
- (2) أ) احسب $\text{pgcd}(x_2; x_3)$ و $\text{pgcd}(x_8; x_9)$
ب) هل x_n و x_{n+1} أوليان فيما بينهما من أجل كل طبيعي n .
- (3) أ) أثبت من أجل كل طبيعي n أن $2x_n - y_n = 5$.
ب) أكتب y_n بدلالة n .
ج) أدرس حسب قيم الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5.
4) نضع $d_n = \text{pgcd}(x_n; y_n)$.
أ) ما هي القيم الممكنة لـ d_n .
ب) عين مجموعة قيم n التي يكون من أجلها x_n و y_n أوليين فيما بينهما.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. لتكن g الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = e^x(x-1)+1$

1) أدرس تغيرات g ثم أنجز جدول تغيراتها.

2) استنتج أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x .

II. لتكن الدالة العددية I المعرفة على \mathbb{R} كما يلي $I(x) = \int_0^x (x-t)e^t dt$

1) أثبت بواسطة مكاملة بالتجزئة أن: $I(x) = e^x - (1+x)$

2) ليكن x عدد حقيقي موجب . أثبت من أجل كل t من $[0; x]$ أن: $1 \leq e^t \leq e^x$.

ثم استنتج أن: $\frac{x^2}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$

3) ليكن x عدد حقيقي سالب. أثبت من أجل كل t من $[x; 0]$ أن: $e^x \leq e^t \leq 1$ ، ثم استنتج أن: $\frac{x^2 e^x}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2}{2}$.

4) استنتج أن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

III. لتكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $\begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.
- 2) أدرس قابلية اشتقاق f عند 0.
- 3) أحسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات الدالة f .
- 4) عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.
- 5) أرسم (T) و (C_f) .

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

السنة الدراسية : 2020 / 2021

المستوى الثالثة رياضيات

وزارة الدفاع الوطني

أركان الجيش الوطني الشعبي

مديرية مدارس أشبال الأمة

التصحيح النموذجي للباكوريا التجريبي مادة الرياضيات

الموضوع الأول

العلامة		عناصر الإجابة	محاور الموضوع
كاملة	مجزأة		
04.5 ن		<p>(I) تعيين العددين v_1 و q : لدينا: $2v_1^2 = v_4 - v_2$ و نعلم أن: $v_4 = v_1 \cdot q^3$ و $v_2 = v_1 \cdot q$ أي تصبح: $2v_1^2 = v_1 \cdot q^3 - v_1 \cdot q$ أي: $2v_1^2 = v_1 \cdot q(q^2 - 1)$ ومنه: $2v_1 = q(q^2 - 1)$. لدينا: q يقسم $2v_1$ و q أولي مع v_1 إذن: q يقسم 2 (حسب ميرهنة غوص) أي أن: $q \in \{1, 2\}$. - في حالة $q = 1$ يكون: $2v_1 = 0$ أي: $v_1 = 0$ (مرفوض) . - في حالة $q = 2$ يكون: $2v_1 = 6$ أي: $v_1 = 3$. إذن نتحصل على: $q = 2$ و $v_1 = 3$.</p>	التمرين الأول
0.75 ن		<p>(II) نفرض أن: $v_1 = 3$ و $q = 2$. (1) كتابة عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) : نعلم أن: $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ ومنه: $v_n = 3 \times 2^{n-1}$.</p>	
0.25 ن		<p>(*) تعيين كل الحدود المحصورة بين 2020 و 1441 : لدينا: $1441 \leq 3 \times 2^{n-1} \leq 2020$ أي: $481 \leq 2^{n-1} \leq 673$ أي نجد: $\ln 481 \leq \ln 2^{n-1} \leq \ln 673$ أي: $\ln 481 \leq (n-1) \ln 2 \leq \ln 673$ ومنه: $\frac{\ln 481}{\ln 2} \leq n-1 \leq \frac{\ln 673}{\ln 2}$ أي: $8,9 \leq n-1 \leq 9,39$ ومنه: $9,9 \leq n \leq 10,39$ ، إذن: $n = 10$ وبالتالي يوجد حد وحيد محصور بين العددين 2020 و 1441 هو: $v_{10} = 1536$</p>	
0.75 ن		<p>(2) لدينا: $S_n = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$ و $P_n = \ln(S_n)$ المجموع S_n هو عبارة عن مجموع لمتتالية هندسية أساسها q^2 و حدها الأول v_1^2 وعدد حدودها n حدا.</p>	
01 ن		<p>أي يكون: $S_n = v_1^2 \times \frac{1-(q^2)^n}{1-q^2} = 9 \times \frac{1-(4)^n}{1-4}$ ومنه: $S_n = 3(4^n - 1)$. (*) لنحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} [3(4^n - 1)] = +\infty$ لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty$</p>	

0.25 ن

(* لنحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(S_n) = +\infty$ لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

0.25 ن

(3 لدينا: α و β عدنان طبيعيان حيث: $v_\alpha < v_\beta$.

0.25 ن

أ) تحليل العدد 2304 إلى جداء عوامل أولية فنحصل على: $2304 = 2^8 \times 3^2$.
ب) تعيين كل الثنائيات (α, β) :

لدينا: $\begin{cases} v_\alpha \times v_\beta = 2304 \\ PGCD(\alpha, \beta) = 2 \end{cases}$ أي يكون: $\begin{cases} (3 \times 2^{\alpha-1})(3 \times 2^{\beta-1}) = 2^8 \times 3^2 \\ PGCD(\alpha, \beta) = 2 \end{cases}$ ومنه:

$$\begin{cases} 2^{\alpha+\beta-2} \times 3^2 = 2^8 \times 3^2 \\ PGCD(\alpha, \beta) = 2 \end{cases}$$

أي: $\begin{cases} \alpha + \beta = 10 \\ PGCD(\alpha, \beta) = 2 \end{cases}$. لدينا: $\alpha = 2\alpha'$ و $\beta = 2\beta'$ و منه: $2\alpha' + 2\beta' = 10$ أي نجد:

$$\alpha' + \beta' = 5$$

لكن لدينا: $\alpha < \beta$ لأن: $v_\alpha < v_\beta$ (المتتالية (v_n) متزايدة) ومنه يكون: $\alpha' < \beta'$.
أي نجد أن هناك ثنائيتان تحقق: $(\alpha', \beta') = (1, 4)$ و $(\alpha', \beta') = (2, 3)$.

0.5 ن

إذن الثنائيات (α, β) المطلوبة هي: $(\alpha, \beta) = (2, 8)$ و $(\alpha, \beta) = (4, 6)$.

(4 الأعداد المسجلة على البطاقات الست هي: 3، 6، 12، 24، 48، 96.

نلاحظ أنه توجد بطاقة وحيدة تحمل حدا رقميه أوليان فيما بينهما و هو v_3 .

لكن السحب هنا يتم دفعة واحدة وفي هذا الأخير لا يوجد تكرار أي ليس باستطاعتنا سحب

0.5 ن

البطاقة التي تحمل الحد v_3 مرتين في آن واحد إذن هذا حدث مستحيل واحتماله يساوي 0.

(1 أ) بواقي قسمة العدد 5^n على 7.

نجد: $5^0 \equiv 1[7]$ ، $5^1 \equiv 5[7]$ ، $5^2 \equiv 4[7]$ ، $5^3 \equiv 6[7]$ ، $5^4 \equiv 2[7]$ ، $5^5 \equiv 3[7]$ و

$$5^6 \equiv 1[7]$$

و نلخصها في الجدول التالي:

قيم العدد الطبيعي n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
بواقي قسمة 5^n على 7	1	5	4	6	2	3

0.5 ن

ب) نعم أن: $1440 \equiv 5[7]$ أي أن: $1440^{(2019)2020} \equiv 5^{(2019)2020} [7]$.

(* لنعين باقي قسمة العدد 2019^{2020} على 6: $2019 \equiv 3[6]$ أي: $2019^{2020} \equiv 3^{2020} [6]$ لكن نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $3^n \equiv 3[6]$ و منه: $2019^{2020} \equiv 3[6]$ أي:

$$2019^{2020} = 6k + 3$$

إذن: $1440^{(2019)2020} \equiv 5^{6k+3} [7]$ أي: $1440^{(2019)2020} \equiv 6[7]$.

0.25 ن

و منه باقي قسمة العدد $1440^{(2019)2020}$ على 7 هو 6.

04 ن

التمرين الثاني

(2) لدينا: $4(5^{n-2} + 5^{n-3} + \dots + 1) \equiv 3[7]$ ، نلاحظ أن: $(5^{n-2} + 5^{n-3} + \dots + 1)$

هو مجموع حدود لمتتالية هندسية أساسها 5 عدد حدودها $(n-1)$ حداً ومنه:

$$5^{n-1} \equiv 4[7] \text{ أي: } 5^{n-1} - 1 \equiv 3[7] \text{ أي: } 4 \left(1 \times \frac{5^{n-1}-1}{5-1}\right) \equiv 3[7]$$

ومنه يكون: $n-1 = 6k+2$ إذن: $n = 6k+3$ مع $(k \in \mathbb{Z})$.

$$(3) \text{ أ) لنبين أن: } 2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = 2n^2 + 6n + 6$$

(* لنحسب $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2$:

$$2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = 2 \times \frac{(n+1)!}{(n+1-2)! \times 2!} + \frac{(n+3)!}{(n+3-2)!}$$

$$= \frac{(n+1) \times n \times (n-1)!}{(n-1)!} + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!}$$

$$\text{و منه: } 2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = (n+1)n + (n+3)(n+2) = n^2 + n + n^2 + 2n + 3n + 6$$

إذن: $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = 2n^2 + 6n + 6$ هو المطلوب.

(ب) لنعين قيم n بحيث يكون: $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 \equiv 0[7]$

لدينا: $2n^2 + 6n + 6 \equiv 0[7]$ أي: $2(n^2 + 3n + 3) \equiv 0[7]$ بما أن 2 أولي مع 7 يكون:

$$n^2 + 3n + 3 \equiv 0[7] \text{ أي: } n^2 + 3n \equiv -3[7] \text{ و منه: } n^2 + 3n \equiv 4[7]$$

يمكن الاستعانة بالجدول التالي (الموافقة بتريديد 7):

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n^2 \equiv$	0	1	4	2	2	4	1	[7]
$3n \equiv$	0	3	6	2	5	1	4	[7]
$n^2 + 3n \equiv$	0	4	3	4	0	5	5	[7]

وبالتالي يكون: $n \equiv 1[7]$ أو $n \equiv 3[7]$ أي: $n = 7k+1$ أو $n = 7k+3$ مع $(k \in \mathbb{Z})$.

$$(4) \text{ لدينا: } C_{10}^2 x - A_{12}^2 y = 15 \dots (E)$$

أ) لنعين $PGCD(C_{10}^2; A_{12}^2)$:

$$\text{نعلم أن: } C_{10}^2 = \frac{10!}{8! \times 2!} = 45 \text{ و } A_{12}^2 = \frac{12!}{10!} = 132 \text{ و منه } PGCD(C_{10}^2; A_{12}^2) = 3$$

إذن المعادلة (E) تصبح: $45x - 132y = 15$

هذه الأخيرة تقبل على الأقل حلاً في \mathbb{Z}^2 لأن: $PGCD(45, 132) = 3$ و 3 يقسم 15.

(ب) لدينا: $45x - 132y = 15$ أي تصبح: $15x - 44y = 5$ أي: $44y = 15x - 5$ أي:

$$44y = 5(3x - 1)$$

لدينا: 5 يقسم $44y$ و 5 أولي مع 44 حسب مبرهنة غوص فإن: 5 يقسم y

وبالتالي يكون: $y = 5k$ أي: $y \equiv 0[5]$ هو المطلوب.

(* لنحل المعادلة (E):

نبحث أولاً عن الحل الخاص أي: $y = 5$ و منه: $44 \times 5 = 5(3x - 1)$ أي: $44 = 3x - 1$ إذن:

0.5 ن

0.5 ن

0.75 ن

0.25 ن

0.25 ن

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R}^* بـ: $g(x) = x^2 - \ln(x^2)$.

(1) دراسة إتجاه تغير الدالة g و تشكيل جدول تغيراتها:

(* الدالة المشتقة: الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^* و عبارة دالتها المشتقة هي: $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}$.
نلاحظ أن إشارة $g'(x)$ من إشارة $x(2x^2 - 2)$ و عليه نلخص الإشارة في الجدول التالي: إذن جدول التغيرات يكون:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	$-$	0	$-$	0	$+$
$2x^2 - 2$	$+$	0	$-$	$-$	0
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0

0.5 ن

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0
$g(x)$	$+\infty$	\searrow	$+\infty$	\swarrow	$+\infty$

0.25 ن

0.75 ن

(* النهايات: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$

0.25 ن

(2) نلاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم تكون: $g(x) > 0$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^* بـ: $f(x) = \frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}$.

(1) أ) حساب النهايات:

(* $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{2}{x^2} + 1 + \frac{\ln(x^2)}{x^2} \right) = -\infty$

فيوضع: $x^2 = t$

هذه الأخيرة تصبح: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$

0.5 ن

(* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(ب) حساب النهايات وتفسير النتائج بيانياً:

(* $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x} \right) = +\infty$ و

0.5 ن

* $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x} \right) = -\infty$

0.25 ن

(* التفسير البياني: المنحني (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً عمودياً معادلته: $x = 0$.

(2) أ) بيان أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ يكون: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^* ودالتها المشتقة هي:

0.25 ن

إذن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ و هو المطلوب. $f'(x) = \frac{-2}{x^2} + 1 + \frac{2 - \ln(x^2)}{x^2} = \frac{x^2 - \ln(x^2)}{x^2}$

(ب) دراسة إتجاه تغير الدالة f : نلاحظ أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ إذن الدالة f

0.25 ن

متزايدة تماماً على كل من المجالين $]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$ و عليه جدول تغيراتها يكون:

ن 0.25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

ج) برهان أن المستقيم (Δ) مقارب للمنحني (C_f) :

ن 0.25

أي نحسب: $\lim_{|x| \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{x} + \frac{\ln(x^2)}{x} \right] = 0$ ، إذن: المستقيم (Δ) هو مقارب

مائل للمنحني (C_f) .

(* دراسة الوضع النسبي: أي ندرس إشارة الفرق $[f(x) - x] = \frac{2 + \ln(x^2)}{x}$.

نلخص الإشارة في الجدول التالي:

ن 0.25

x	$-\infty$	$-e-1$	0	$e-1$	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$2 + \ln(x^2)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x) - x$	$-$	0	$+$	$-$	0
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)

3) أ) التحقق أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ ، $-x \in \mathbb{R}^*$ يكون: $f(x) + f(-x) = 0$

لدينا: $f(x) + f(-x) = \frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x} - \frac{2}{-x} - (-x) - \frac{\ln(x^2)}{-x} = 0$

ن 0.25

إذن و بما أنه من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ ، $-x \in \mathbb{R}^*$ و $f(x) + f(-x) = 0$ فإن الدالة f فردية و

منحناها البياني (C_f) يقبل مبدأ المعلم O كمركز التناظر.

ن 0.25

ب) باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نجد أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

$0,3 < \alpha < 0,4$ و بما أن الدالة f فردية إذن يوجد حل آخر β محصور بين $-0,4$ و $-0,3$

أي يكون: $-0,4 < \beta < -0,3$.

4) أ) المنحني (C_f) يقبل مماسين يوازيان المستقيم (Δ) يعني أن: $f'(x) = 1$ ،

لنحل في \mathbb{R}^* هذه الأخيرة.

لدينا: $\frac{x^2 - \ln(x^2)}{x^2} = 1$ أي: $\frac{x^2 - \ln(x^2)}{x^2} - 1 = 0$ أي تصبح: $\frac{-\ln(x^2)}{x} = 0$ أي:

$$\begin{cases} -\ln(x^2) = 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases}$$

ن 0.25

هذا يكافئ: $x^2 = 1$ أي: $x = 1$ أو $x = -1$ و منه فعلا المنحني (C_f) يقبل مماسين موازيين

للمستقيم (Δ) .

ن 0.25

(* كتابة معادلة المماس (T_1) عند $x_0 = 1$: $(T_1): y = f'(1)(x-1) + f(1)$ ومنه:

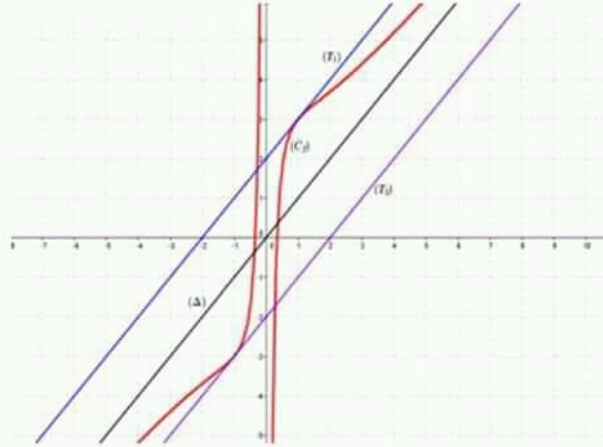
$$(T_1): y = x + 2$$

ن 0.25

(* كتابة معادلة المماس (T_2) عند $x_0 = -1$: $(T_2): y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ ومنه:

$$(T_2): y = x - 2$$

(ب) الإنشاء:



0.75 ن

$$(5) \text{ لدينا: } h(x) = f(x+1) + 2 = \left[\frac{\ln(x+1)^2}{x+1} + (x+1) + \frac{2}{x+1} \right] + 2$$

0.25 ن

إن: يوجد تحويل نقطي يحول المنحني (C_f) إلى (C_h) و هو الإنسحاب الذي شعاعه $\sqrt[2]{-1}$.

(6) أ) بيان أن الدالة F أصلية للدالة f على \mathbb{R}^* :

$$\text{لدينا: } F'(x) = x + \frac{2}{4} \times \frac{2}{x} \times \ln x^2 + \frac{2}{|x|} = x + \frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{2}{|x|}$$

0.25 ن

* إذا كان $x > 0$ فإن: $F'(x) = \frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}$ وإذا كان $x < 0$ فإن:

$$F'(x) = \frac{-2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}$$

0.25 ن

(ب) الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x=1$ هي:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}[\ln(x)^2]^2 + 2\ln|x| - \frac{1}{2}$$

0.25 ن

(ج) حساب التكامل $I = \int_1^\lambda f(x) dx$ مع $\lambda > 1$:

0.25 ن

$$\text{لدينا: } I = \int_1^\lambda f(x) dx = [F(x)]_1^\lambda = F(\lambda) - F(1) \text{ و منه: } I = F(\lambda) \text{ لأن: } F(1) = 0$$

* التفسير الهندسي: I هي مساحة الحيز المستوي المحصور بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ)

والمستقيمين اللذين معادلتهم: $x=1$ و $x=\lambda$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

السنة الدراسية : 2020 / 2021

المستوى الثالثة رياضيات

وزارة الدفاع الوطني

أركان الجيش الوطني الشعبي

مديرية مدارس أشبال الأمة

التصحيح النموذجي للبيكالوريا التجريبي مادة الرياضيات

الموضوع الثاني

العلامة		عناصر الإجابة	محاور الموضوع								
كاملة	مجزأة										
04 ن	0.5 ن	(1) عدد الحالات الممكنة للسحب : $A_{10}^2 = 90$. (2) لتكن A حادثة سحب كرتان من نفس اللون:	التمرين الأول								
	0.75 ن	$. P(A) = \frac{A_4^2 + A_6^2}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$									
	0.75 ن	(3) لتكن B حادثة سحب كرتان تحملان رقمان زوجيان :									
	0.75 ن	$. P(B) = \frac{A_4^2}{90} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$									
	0.75 ن	(4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل حالة سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة . أ) قيم X الممكنة : $X(\omega) = \{0;1;2\}$. قانون احتمال X : $P(X=0) = \frac{A_6^2}{A_{10}^2} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$. $. P(X=1) = \frac{A_4^1 \times A_6^1 \times C_2^1}{A_{10}^2} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$ $. P(X=2) = \frac{A_4^2}{A_{10}^2} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$									
	0.75 ن	<table border="1"> <tr> <td>x_i</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>$P(X=x_i)$</td> <td>$\frac{1}{3}$</td> <td>$\frac{8}{15}$</td> <td>$\frac{2}{15}$</td> </tr> </table>	x_i	0	1	2	$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$	
x_i	0	1	2								
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$								

	0.5 ن	<p>(ب) الأمل الرياضي:</p> $.E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{2}{15} = \frac{12}{15} = 0,8$	
04 ن		<p>(1) لدينا $\begin{cases} S(A') = C \\ S(C) = B \end{cases}$ يعني $\begin{cases} CB = k A'C \\ (\overline{A'C}; \overline{CB}) = \theta + 2k\pi \end{cases}$</p>	التمرين الثاني
	01.5 ن	<p>ومنه $\begin{cases} k = \frac{CB}{A'C} = \frac{CB}{AC} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2 \\ \theta = (\overline{CA'}; \overline{CB}) + \pi = -\frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{\pi}{3} \end{cases}$</p>	
	0.25 ن	<p>(2) بما أن C مصف $[AA']$ فإن B منتصف $[CD]$.</p>	
	0.25 ن	<p>(أ) $C\Omega^2 + CB^2 = C\Omega^2 + (\overline{C\Omega} + \overline{\Omega B})^2$ $= 2C\Omega^2 + \Omega B^2 - 4 \times \Omega C \times \Omega C \times \frac{1}{2} = \Omega B^2$</p>	
	0.25 ن	<p>و منه $(C\Omega)$ يعامد (CB)</p> <p>(ب) $A'\Omega^2 + A'C^2 = A'\Omega^2 + (\overline{A'\Omega} + \overline{\Omega C})^2$ $= 2A'\Omega^2 + \Omega C^2 - 4 \times \Omega A' \times \Omega A' \times \frac{1}{2} = \Omega C^2$</p>	
	0.25 ن	<p>و منه $(A'\Omega)$ يعامد $(A'C)$</p>	
	0.25 ن	<p>(ج) Ω هي تقاطع المستقيم الذي يعامد (BC) في C مع المستقيم الذي يعامد $(A'C)$ في A'.</p>	
	0.25 ن	<p>(1. II) $CA = AB \times \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ إذن $\tan \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{CA}{AB}$</p>	
	0.5 ن	<p>ومنه $A' \left(0; \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$ و $C \left(0; \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$</p> <p>(2) بما أن $k = 2$ و $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ فإن عبارة S من الشكل</p>	
	0.75 ن	<p>$z' = (1 + i\sqrt{3})z + b$</p> <p>و بما أن $S(A') = C$ فإن $\frac{i\sqrt{3}}{3} = (1 + i\sqrt{3})\frac{2i\sqrt{3}}{3} + b$ إذن $b = \frac{6 - i\sqrt{3}}{3}$</p>	
		<p>و منه $z_\Omega = \frac{6 - i\sqrt{3}}{-3i\sqrt{3}} = \frac{1}{3} + i\frac{2\sqrt{3}}{3}$</p>	
		<p>(3) $\arg(z - z_{A'}) = -\frac{\pi}{2}$ يعني $\arg \left(z - 2i\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = -\frac{\pi}{2}$</p>	
0.25 ن		<p>يعني $(\overline{u}, \overline{A'M}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ و منه مجموعة النقط M هي نصف المستقيم</p>	

التمرين
الرابع

ن 07 ن 0.25

I . I) من أجل كل x من $x e^x = g'(x)$

ن 0.25

g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x e^x$		$-$	$+$

ن 0.25

(2) $g(0)$ قيمة حدية صغرى و بما أن $g(0) = 0$ نستنتج أن g موجبة على \square

$$I(x) = \int_0^x (x-t) e^t dt \quad \text{حساب (1 . II)}$$

ن 01

نضع $\left. \begin{array}{l} u(t) = x-t \\ v'(t) = e^t \end{array} \right\}$ إذن $\left. \begin{array}{l} u'(t) = -dt \\ v(t) = e^t \end{array} \right\}$ و حسب قانون التكامل بالتجزئة نجد

$$I(x) = \left[(x-t) e^t \right]_0^x + \int_0^x e^t dt = \left[(x-t) e^t + e^t \right]_0^x = e^x - x - 1 = e^x - (x+1)$$

(2) ليكن x حقيقي موجب و t حقيقي من المجال $[0; x]$ معناه $0 \leq t \leq x$ أي

$1 \leq e^t \leq e^x$ و بعد الضرب في $(x-t)$ نجد $(x-t) \leq e^t (x-t) \leq e^x (x-t)$ و أخيرا

بعد المرور إلى التكامل نصل إلى $\int_0^x (x-t) dt \leq \int_0^x e^t (x-t) dt \leq \int_0^x e^x (x-t) dt$

ن 0.5

$$\text{يعني } \left[e^x \left(xt - \frac{t^2}{2} \right) \right]_0^x \leq I(x) \leq \left[xt - \frac{t^2}{2} \right]_0^x \text{ يعني } \frac{x^2}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$$

(3) ليكن x حقيقي سالب و t حقيقي من المجال $[x; 0]$ معناه $x \leq t \leq 0$ أي

$e^x \leq e^t \leq 1$ و بعد الضرب في $(x-t)$ نجد $(x-t) \leq e^t (x-t) \leq e^x (x-t)$

لأن $(x-t)$ سالب و أخيرا بعد المرور إلى التكامل نصل إلى

$$\int_x^0 (x-t) dt \leq \int_x^0 e^t (x-t) dt \leq \int_x^0 e^x (x-t) dt$$

ن 0.5

$$\left[\left(xt - \frac{t^2}{2} \right) \right]_x^0 \leq -I(x) \leq \left[e^x \left(xt - \frac{t^2}{2} \right) \right]_x^0$$

$$\text{يعني } -\frac{x^2}{2} \leq -I(x) \leq -\frac{x^2 e^x}{2} \text{ و منه } \frac{x^2}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$$

(4) لدينا مما سبق من أجل كل x موجب $\frac{x^2}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$ أي

$$\frac{x^2}{2} \leq e^x - (1+x) \leq \frac{x^2 e^x}{2} \text{ و منه}$$

من أجل كل x موجب تماما $\frac{1}{2} \leq \frac{e^x - (1+x)}{x^2} \leq \frac{e^x}{2}$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$ فإن

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} \dots (1)$$

من أجل كل x سالب $\frac{x^2}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$ أي $\frac{x^2 e^x}{2} \leq e^x - (1+x) \leq \frac{x^2}{2}$ و منه

من أجل كل x سالب

تماما $\frac{1}{2} \leq \frac{e^x - (1+x)}{x^2} \leq \frac{e^x}{2}$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$ فإن

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} \dots (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

III . حساب النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} (1 - e^{-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{من السؤال II. 4 نجد}$$

و منه f قابلة للاشتقاق 0 عند $f'(0) = \frac{1}{2}$.

من أجل كل x من \mathbb{R}^* فإن $f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ و منه $f' > 0$ على

\mathbb{R}^* . إذن f متزايدة تماما على \mathbb{R}^* .

$$(T): y = \frac{1}{2}x + 1$$

