الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية تمنراست

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي — دورة 2021

الشعبة : علوم تجريبية

اختبار في مادة الرياضيات — المدة: 3 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{R}$ بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=3-\dfrac{10}{u_n+4}$.

أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\leq u_n\leq 1$.

ب. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها .

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$.

أ. أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{2}{5}$ ثم أحسب حدها الأول v_0

ب. عبر عن v_n و u_n بدلالة n ، و أحسب من جديد $\lim u_n$.

3) أحسب بدلالة n ، المجموع S_n حيث $S_n=v_{n+1}+v_{n+2}+\ldots+v_{n+2021}$ ثم استنتج بدلالة n ،

المجموع S'_n حيث : $S'_n=\dfrac{1}{u_{n+1}+2}+\dfrac{1}{u_{n+2}+2}+\ldots+\dfrac{1}{u_{n+2021}+2}$

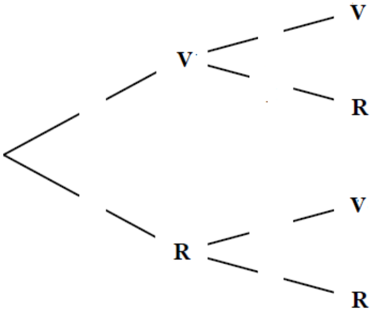
التمرين الثاني: (04 نقاط)

إناء به 5 كريات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس : 2 كرية خضراء و 3 كريات حمراء .

1) نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتان من الإناء . نرمز بـ X إلى المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكريات الخضراء المسحوبة .

أ. تحقق أن $p(X=0)=\dfrac{3}{10}$ ثم عين قانون احتمال X ثم أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

ب. أحسب احتمال الحادثة A : " الكريتان المسحوبتان من نفس اللون " .



2) نسحب على التوالي كريتين من الإناء بالطريقة التالية : إذا كانت الكرية المسحوبة حمراء نعيدها إلى الإناء ، وإذا كانت الكرية المسحوبة خضراء لا نعيدها إلى الإناء. نرمز إلى كرية خضراء بالرمز V وإلى كرية حمراء بالرمز R

أ. انقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات المقابلة .

ب. احسب احتمال الحادثتين: B: " الكرية المسحوبة الأولى خضراء " . C : " إحدى الكريتين المسحوبتين خضراء " .

ج. بين أن احتمال أن يوجد في الإناء 2 كرية خضراء هو $\dfrac{9}{25}$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) عين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث : $\begin{cases} z_1 + iz_2 = \sqrt{3} + i \\ 2iz_1 - z_2 = 2i\sqrt{3} \end{cases}$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A = \sqrt{3} - i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = 2i$.

1) بين أن النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2 ثم مثل النقط A ، B و C

2) تحقق أن $\dfrac{z_A}{z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج طبيعة المثلث OAB واحسب مساحته .

3) عين z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(C;1)\}$

4) عين (Γ_1) مجموعة النقط M التي لاحقتها z حيث: $\left\|2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 2$

5) (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث : $\arg(z+2i) = \dfrac{\pi}{3}$.

تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ_2) ثم عين المجموعة (Γ_2) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + (x-1)e^{2x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. أ. أثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

ب. أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) .

3. بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = 1 + (2x-1)e^{2x}$

4. إليك جدول تغيرات الدالة f' الدالة المشتقة للدالة f .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

أ. برر أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثياها

ب.حدد حسب قيم x إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

5. أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α . برر أن $0{,}8 < \alpha < 0{,}9$.

6. بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) ثم أكتب معادلة لـ (T) . أرسم (C_f) ، (Δ) و (T) .

7. m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة $me^{-2x} - x + 1 = 0$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n < 4$.

2. أ. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + 3u_n + 4}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$

ب. استنتج اتجاه تغير (u_n) ثم برر لماذا (u_n) متقاربة .

3. أ.بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 - u_{n+1} \le \dfrac{1}{2}(4 - u_n)$.

ب. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le 4 - u_n \le \dfrac{1}{2^n}(4 - u_0)$.

ج. استنتج نهاية (u_n)

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I) يحتوي كيس على 10 قريصات متماثلة : 7 بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3 و 3 سوداء تحمل الأرقام 1 ، 4 ، 4 . نسحب في آن واحد قريصتين من هذا الكيس و نعتبر الحوادث :

A : " الحصول على قريصتين من نفس اللون " .

B : " الحصول على قريصتين تحملان رقمين مختلفين "

C : " مجموع الرقمين اللذين تحملهما القريصتان المسحوبتان يساوي 5 " .

أ – بين أن احتمال الحادثة B يساوي $\dfrac{4}{5}$ ثم أحسب احتمال كل من الحادثة A والحادثة C .

ب – أحسب احتمال الحصول على قريصتين من نفس اللون و تحملان رقمين مختلفتين .

ج – استنتج احتمال الحصول على قريصتين من نفس اللون أو تحملان رقمين مختلفتين.

II) نضيف إلى الكيس 2 قريصة حمراء. الكيس يحوي إذن 12 قريصة . نسحب الآن 3 قريصات في آن واحد وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المحصل عليها .

أ –برر أن قيم المتغير العشوائي X هي : 1 ؛ 2 ؛ 3 .

ب –بين أن $p(X = 2) = \dfrac{71}{110}$ ثم عين قانون احتمال المتغير X و احسب أمله الرياضي.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

هذا التمرين هو استبيان متعدد الإجابات ، لكل سؤال 4 أجوبة مقترحة واحد منها صحيح ، المطلوب : تحديد الإجابة الصحيحة مع التبرير. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

A ، B و C نقط لاحقاتها $z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ و $z_C = -1 + i\sqrt{3}$.

1. الشكل الجبري للعدد z_A هو : أ) $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ب) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ج) $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ د) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

2. الشكل الأسي لـ z_C هو : أ) $2e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ب) $-e^{i\frac{\pi}{2}}$ ج) $-2e^{-\frac{i\pi}{3}}$ د) $\sqrt{2}e^{\frac{2i\pi}{3}}$

3. لاحقة النقطة D بحيث يكون O مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(D;1)\}$:

أ) $1+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ب) $-1+\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})i$ ج) $1+i$ د) $1+\frac{1}{2}i$.

1. ليكن n عددا طبيعيا،العدد $(z_B)^n$ حقيقي موجب معناه n من الشكل :

أ) $4k$ ب) $4k+1$ ج) $8k+4$ د) $8k$ $(k\in\mathbb{N})$

5. مجموعة النقط M التي لاحقتها z حيث : $(z+1-i\sqrt{3})(\overline{z}+1+i\sqrt{3})=4$ هي :

أ) دائرة ب) نقطة ج) مستقيم د) قطعة مستقيمة

التمرين الرابع: (07 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=x-\frac{\ln x}{x}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أثبت أن :
   - إذا كان $x>1$ فإن: $x^2-1+\ln x>0$.
   - إذا كان $0<x<1$ فإن: $x^2-1+\ln x<0$.

2. أ. أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $f'(x)=\frac{x^2-1+\ln x}{x^2}$.

جـ. شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. أ. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب. أدرس وضعية المنحني (C_f)بالنسبة إلى (Δ)

ج. بين أن المنحني (C_f)يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

4. أنشئ المستقيمين (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f) .

5. g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ $g(x)=x-\frac{\ln|x|}{x}$.

أ. بين أن الدالة g فردية ثم باستعمال المنحني (C_f) ارسم المنحني (C_g)

6. m وسيط حقيقي ، عين مجموعة قيم m حتى يكون للمعادلة $g(x)=m$ حلين متمايزين .

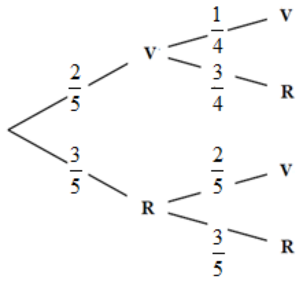
7. h الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $h(x)=\frac{x^2-1-\ln(x-1)}{x-1}$

بين أن $h(x)=f(x-1)+2$ ، اشرح كيف يمكن رسم المنحنيٍ (C_h)انطلاقا من (C_f)

انتهى الموضوع الثاني

الإجابة النموذجية لموضوع اختبار مادة : الرياضيات / الشعبة علوم تجريبية / بكالوريا تجريبية 2021

<table dir="rtl">
<tr><th rowspan="2">عناصر الإجابة (الموضوع الأول)</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>المجموع</th></tr>
<tr><td>التمرين الأول :
1.أ) البرهان بالتراجع</td><td>0.50+0.25</td><td rowspan="10">4</td></tr>
<tr><td>ب) $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-1)(u_n+2)}{u_n+4}$ بما أن $0\le u_n<1$ فإن : $u_{n+1}-u_n>0$ إذن (u_n) متزايدة تماما</td><td>2×0.25</td></tr>
<tr><td>-استنتاج أن (u_n) متقاربة.</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>-حساب النهاية : (u_n) متقاربة إذن $\lim u_n=l$ و $\lim u_{n+1}=l$ ومنه l حل للمعادلة
$l=3-\frac{10}{l+4}$ أي $l=1$ أو $l=-2$. وبما أن $u_0=0$ و (u_n) متزايدة فإن : $l=1$ أي
$\lim u_n=1$.</td><td>0.50</td></tr>
<tr><td>2. أ) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$.</td><td>0.50</td></tr>
<tr><td>ب) عبارة v_n بدلالة n : $v_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ و $u_n=\frac{1+2v_n}{1-v_n}=\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$.</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>حساب $\lim u_n$: لدينا $-1<\frac{2}{5}<1$ إذن : $\lim\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$ ومنه : $\lim u_n=1$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>3. حساب S_n $S_n=v_{n+1}\frac{1-q^{2021}}{1-q}=-\frac{5}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{2021}\right]$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>استنتاج حساب S_n' حيث : $S_n'=\frac{1}{u_{n+1}+2}+\frac{1}{u_{n+2}+2}+...+\frac{1}{u_{n+2021}+2}$
لدينا : $\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{3}(1-v_n)$ إذن :</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>$S_n'=\frac{1}{3}(1-v_{n+1})+\frac{1}{3}(1-v_{n+2})+...+\frac{1}{3}(1-v_{n+2021})$ أي : $S_n'=\frac{1}{3}(2021-S_n)$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>التمرين الثاني :
1. التحقق أن $p(X=0)=\frac{3}{10}$</td><td>0.5</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>قانون احتمال X : $p(X=1)=\frac{C_2^1\times C_3^1}{10}=\frac{6}{10}$ ، $p(X=2)=\frac{C_2^2}{10}=\frac{1}{10}$
<table><tr><td>X_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>$p(X=X_i)$</td><td>$\frac{3}{10}$</td><td>$\frac{6}{10}$</td><td>$\frac{1}{10}$</td></tr></table>الأمل الرياضياتي : $E(X)=\frac{4}{5}$.</td><td>1
0.5</td></tr>
</table>

4	01	2 أ) الشجرة : 
	2×0.5	ب) $p(B)=\frac{2}{5}$ ، $p(C)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{27}{50}$
	0.5	ج) احتمال أن يبقى في الإناء 2 كرية خضراء يعني سحب كريتان حمراء: $\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$
5	2×0.5	**التمرين الثالث :** I) $z_1=\sqrt{3}-i$ و $z_2=2$
	0.75+1	II) 1. تبيين أن النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2 . تمثيل النقط
	0.25 0.25+0.5	2. التحقق أن $\frac{z_A}{z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ – استنتاج طبيعة المثلث – مساحة المثلث تحقق أن $S_{ABC}=\sqrt{3}\,u.a$
	0.25	3. $z_D=-2i$.
	0.50	4. (Γ_1) هي الدائرة التي مركزها $D(0;-2)$ ونصف قطرها 2.
	0.25 0.25	5. التحقق أن B تنتمي إلى (Γ_2) $\arg(z_B+2i)=\frac{\pi}{3}$. $\arg(z+2i)=\frac{\pi}{3}$ معناه $\arg(z-z_D)=\frac{\pi}{3}$ أي $(\vec{u};\overrightarrow{DM})=\frac{\pi}{3}$ إذن (Γ_2) هي نصف المستقيم $[DB)$ باستثناء النقطة D
7	0.25+0.5	**التمرين الرابع :** 3. 1. تبيين أن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ ثم حساب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.
	0.5	2. أ. إثبات أن $(\Delta):y=x$ مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$
	0.5	ب. الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)
	0.5	3. بين أن من أجل كل x من $\mathbb{N}$؛ $f'(x)=1+(2x-1)e^{2x}$
	2×0.25	4.أ) تبرير أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف I (بأي طريقة) تعيين إحداثيا I : $I(0;f(0))$ أي $I(0;-1)$
	2×0.5	ب. إشارة $f(x)$ ؛ جدول التغيرات
	0.5	5. إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α . تبرير أن $0,8<\alpha<0,9$.
	0.50 0.25 1	6. تبيين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) معادلة المماس (T) : - رسم (C_f) ، (Δ) و (T)
		7. المناقشة البيانية حسب قيم m لعدد حلول المعادلة $me^{-2x}-x+1=0$.

	0.25	• $f(x)=x+m$ معناه $me^{-2x}-x+1=0$
	3×025	• $m<-\frac{e}{2}$ ليس للمعادلة حلا . • $m=-\frac{e}{2}$ أو $m\geq 1$ للمعادلة حل واحد • $-\frac{e}{2}<m<1$ حلين

التصحيح المفصل للإمتحان التجريبي

الموضوع الثاني

التمرين الأول(04 نقاط):

1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب : $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\sqrt{3u_n+4}$.

2. نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\leq u_n<4$.

. من أجل $n=0$ ، $u_0=0$ و $0\leq u_0\leq 4$ إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$ 0.25

. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي : $0\leq u_n\leq 4$ و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$

أي : $0\leq u_{n+1}\leq 4$

لدينا: $0\leq u_n\leq 4$ ، نضرب أطراف المتباينة في 3 نجد : ، $0\leq 3u_n\leq 12$ نضيف 4 نجد:

$4\leq 3u_n+4\leq 16$ و منه $0\leq 2\leq\sqrt{3u_n+4}\leq 4$ و بالتالي $0\leq u_{n+1}\leq 4$.......... 0.5

2. أ. نتحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+3u_n+4}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}$:

$$\frac{3u_n+4-u_n^2}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}=\frac{(\sqrt{3u_n+4}-u_n)(\sqrt{3u_n+4}+u_n)}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}=u_{n+1}-u_n=\sqrt{3u_n+4}-u_n \text{ .... } 0.75$$

لدينا: $\frac{-(u_n+1)(u_n-4)}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}=\frac{3u_n+4-u_n^2}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}=u_{n+1}-u_n$

بما أن $0\leq u_n\leq 4$ فإن : $1\leq u_n+1\leq 5$ و $-4\leq u_n-4\leq 0$ و $\sqrt{3u_n+4}+u_n>0$

إذن : $u_{n+1}-u_n<0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما 0.5

بماأن (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى فهي متقاربة................0.25

4. أ.نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(4-u_n)$:

لدينا : $\frac{3(4-u_n)}{4+\sqrt{3u_n+4}}=\frac{16-3u_n-4}{4+\sqrt{3u_n+4}}=\frac{(4-\sqrt{3u_n+4})(4+\sqrt{3u_n+4})}{4+\sqrt{3u_n+4}}=4-\sqrt{3u_n+4}=4-u_{n+1}$

لدينا أيضا $0\leq u_n\leq 4$: و منه : $4\leq 3u_n+4\leq 16$ و $2\leq\sqrt{3u_n+4}\leq 4$ و بالتالي :

$6 \le 4+\sqrt{3u_n+4} \le 8$ إذن : $\frac{1}{6} \le \frac{1}{4+\sqrt{3u_n+4}} \le \frac{1}{8}$ و بما أن $4-u_n \ge 0$ إذن :

$\frac{3(4-u_n)}{4+\sqrt{3u_n+4}} \le \frac{3(4-u_n)}{6}$ ومنه $4-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4-u_n)$ 0.75

ت. التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le 4-u_n \le \frac{1}{2^n}(4-u_0)$:

لدينا : $4-u_n \le \frac{1}{2}(4-u_{n-1})$ ، $4-u_{n-1} \le \frac{1}{2}(4-u_{n-2})$ ، $4-u_{n-2} \le \frac{1}{2}(4-u_{n-3})$ ،....

$4-u_1 \le \frac{1}{2}(4-u_0)$ ، بالضرب طرفا إلى طرف نجد:

$$(4-u_n)(4-u_{n-1})(4-u_{n-2})\dots(4-u_1) \le \frac{1}{2}(4-u_{n-1})\frac{1}{2}(4-u_{n-2})\frac{1}{2}(4-u_{n-3})\dots\frac{1}{2}(4-u_0)$$

نختزل الأطراف المتشابهة نجد : $0 \le (4-u_n) \le \left(\frac{1}{2}\right)^n(4-u_0)$..........0.5

ح. استنتاج نهاية (u_n) :

بما أن : $0 \le (4-u_n) \le \left(\frac{1}{2}\right)^n 4$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n 4 = 0$ و منه حسب النهايات بالمقارنة $\lim\limits_{n\to+\infty}(4-u_n) = 0$

و بالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$ 0.5

التمرين الثاني (04 نقاط):

I) يحتوي كيس على 10 قريصات متماثلة : 7 بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3 و 3 سوداء تحمل الأرقام 1 ، 4 ، 4 . نسحب في آن واحد قريصتين من هذا الكيس و نعتبر الحوادث :

A : " الحصول على قريصتين من نفس اللون " .

B : " الحصول على قريصتين تحملان رقمين مختلفين "

C : " مجموع الرقمين اللذين تحملهما القريصتان المسحوبتان يساوي 5 " .

ت نبين أن احتمال الحادثة B يساوي $\frac{4}{5}$ لدينا: $\bar{B}$: " الحصول على قريصتين تحملان رقمين متشابهين "

$p(B) = 1-p(\bar{B}) = 1-\frac{C_4^2+C_2^2+C_2^2+C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{36}{45} = \frac{4}{5}$ 0.5

. حساب احتمال كل من الحادثة A والحادثة C :

$p(A) = \frac{C_7^2+C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$ 0.5

$p(C) = \frac{C_4^1\times C_2^1+C_2^1\times C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$ 0.5

ب- حساب احتمال الحصول على قريصتين من نفس اللون و تحملان رقمين مختلفتين .

$p(A\cap B) = \frac{C_3^1\times C_2^1+C_3^1\times C_2^1+C_2^1\times C_2^1+C_2^1\times C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$ 0.5

ج-استنتاج احتمال الحصول على قريصتين من نفس اللون أو تحملان رقمين مختلفتين:

$p(A\cup B) = p(A)+p(B)-p(A\cap B) = \frac{8}{15}+\frac{4}{5}-\frac{2}{5} = \frac{14}{15}$ 0.5

II) نضيف إلى الكيس 2 قريصة حمراء. الكيس يحوي إذن 12 قريصة . نسحب الآن 3 قريصات في آن واحد وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المحصل عليها .

أ .تبرير أن قيم المتغير العشوائي X هي : 1 ؛ 2 ؛ 3 :

قيم X هي: $X = 1$ في حالة ظهور 3 كرات بيضاء BBB أو 3 كرات سوداء NNN، $X = 2$ ظهور لونين أسود و أبيض: NNB أو BBN أو أبيض و أحمر: BBR أو BRR أو أسود و أحمر : NNR أو NRR ، $X = 3$ ظهور 3 ألوان أبيض ، أسود و أحمر: BNR............. 0.5

ب. بيان أن $p(X=2)=\frac{71}{110}$:

$p(X=2) = \frac{C_7^2 \times C_5^1 + C_3^2 \times C_9^1 + C_2^2 \times C_{10}^1}{C_{12}^3} = \frac{142}{220} = \frac{71}{110}$ 0.25

. قانون احتمال المتغير X: $p(X=1) = \frac{C_7^3 + C_{10}^3}{C_{12}^3} = \frac{36}{220} = \frac{9}{55}$ ، $p(X=3) = \frac{C_7^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_{12}^3} = \frac{42}{220} = \frac{21}{110}$

X	1	2	3
$p(X)$	$\frac{9}{55}$	$\frac{71}{110}$	$\frac{21}{110}$

.... 0.5

حساب أمله الرياضي: $E(X) = 1 \times \frac{9}{55} + 2 \times \frac{71}{110} + 3 \times \frac{21}{110} = \frac{223}{110} = 2.027$ 0.25

التمرين الثالث (05 نقاط):

هذا التمرين هو استبيان متعدد الإجابات ، لكل سؤال 4 أجوبة مقترحة واحد منها صحيح ، المطلوب : تحديد الإجابة الصحيحة مع التبرير. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

A ، B و C نقط لاحقاتها $z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ و $z_C = -1 + i\sqrt{3}$.

1. الشكل الجبري للعدد z_A هو:

لدينا : $z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 0.75

إذن الإجابة الصحيحة هي ج) $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 0.25

2. الشكل الأسي لـ z_C هو:

لدينا : $z_C = -1 + i\sqrt{3}$ ، $|z_C| = \sqrt{1+3} = 2$ و $\arg(z_C) = \arg(-1 + i\sqrt{3}) = \theta$ بحيث

$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ إذن $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ و بالتالي : $z_C = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$............0.75

إذن الإجابة الصحيحة هي: أ) $2e^{\frac{2i\pi}{3}}$ 0.25

3. لاحقة النقطة D بحيث يكون O مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(D;1)\}$ هي:

لدينا: $z_O = \frac{z_A - z_B + z_D}{1-1+1}$ و منه $z_D = z_O - z_A + z_B$ إذن $z_D = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$

ومنه : $z_D = -1 + i\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ .... 0.75.إذن الإجابة الصحيحة هي ب) $-1+\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)i$ 0.25

4. ليكن n عددا طبيعيا،العدد $(z_B)^n$ حقيقي موجب معناه n من الشكل :

الشكل الأسي لـz_B هو : $z_B = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}$، $\arg(z_C) = \arg\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = \alpha$ و $|z_B| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ بحيث:

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ إذن $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ و بالتالي $z_B = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ و منه $(z_B)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}$

$(z_B)^n$ حقيقي موجب معناه : $\frac{n\pi}{4} = 2k\pi$ و منه : $n = 8k$ حيث k عدد صحيح 0.75

إذن الإجابة الصحيحة هي: د) $8k$ 0.25

5. مجموعة النقط M التي لاحقتها z حيث : $\left(z+1-i\sqrt{3}\right)\left(\overline{z}+1+i\sqrt{3}\right)=4$ هي :

لدينا : $(z + 1 - \mathrm{i}\sqrt{3})(\bar{z} + 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) = (z + 1 - \mathrm{i}\sqrt{3})\left(\overline{z + 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}\right) = |z + 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}|^2$

$$(z + 1 - \mathrm{i}\sqrt{3})(\bar{z} + 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) = |z - (-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})|^2 = |z - z_C|^2 = 4$$

معناه $MC^2 = 4$ و منه $MC = 2$ إذن مجموعة النقط هي دائرة ذات المركز C و نصف القطر 2 ...... 0.75

إذن الإجابة الصحيحة هي: أ) دائرة 0.25

التمرين الرابع(07 نقاط):

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=x-\frac{\ln x}{x}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

4. أثبات أن : − إذا كان $x>1$ فإن: $x^2-1+\ln x>0$.

− إذا كان $0<x<1$ فإن: $x^2-1+\ln x<0$.

نضع : لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $k(x) = x^2 - 1 + \ln x$

ندرس إتجاه تغير الدالة k $k'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ ، من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ $k'(x)$ موجبة و منه

الدالة k متزايدة تماما على $]0;+\infty[$...0.25 $\lim\limits_{x \to 0^{>}} k(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = +\infty$

إذن جدول تغيرات الدالة k : 0.25

x	0	1	$+\infty$
$k'(x)$		$+$	
$k(x)$	$-\infty$	0 ↗	$+\infty$

و لدينا $k(1) = 0$

إذن $k(x)$ موجبة على $]0;1[$ و سالبة على $]1;+\infty[$ و بالتالي : إذا كان $x>1$ فإن: $x^2-1+\ln x>0$ و إذا كان $0<x<1$ فإن: $x^2-1+\ln x<0$ ... 0.5

2. أ. حساب $\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x)$: $\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^{>}} [x - \frac{\ln x}{x}] = +\infty$ 0.25

التفسير الهندسي : (C_f) يقبل حامل محور التراتيب مستقيم مقارب.......... 0.25

حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$ 0.25

ب. نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x) = \frac{x^2-1+\ln x}{x^2}$

لدينا : $f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x}\times x - 1\times \ln x}{x^2} = 1 - \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2-1+\ln x}{x^2}$ 0.5

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x^2-1+\ln x)$ إذن f متناقصة تماما على المجال $]0;1]$ و متزايدة تماما على $[1;+\infty[$ 0.25

جـ. نشكل جدول تغيرات الدالة f : 0.25

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3. أ. نبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$:

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} [f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty} [x - \frac{\ln x}{x} - x] = \lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$ 0.25

و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب. دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ):...............0.5

لدينا : $f(x) - x = -\frac{\ln x}{x}$ بما أن $x > 0$ إذن إشارة $f(x) - x$ من إشارة $-\ln x$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي ل (C_f) و (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	يتقاطعان في النقطة $(1;1)$	(C_f) تحت (Δ)

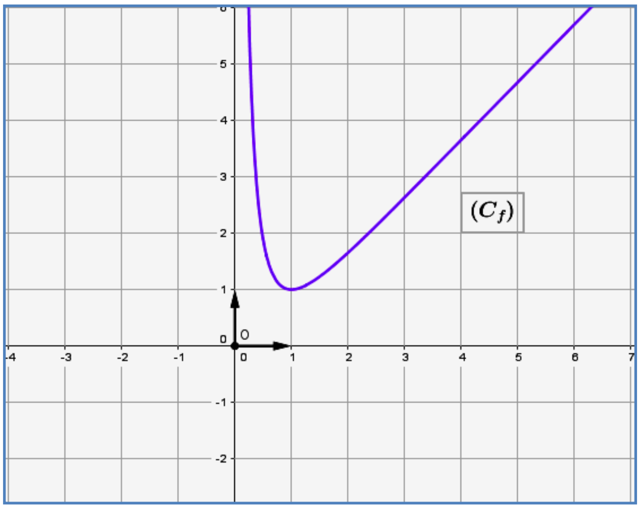
جـ. نبين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) : معناه $f'(x) = 1$ ... 0.25 و منه $\frac{x^2-1+\ln x}{x^2} = 1$

و بالتالي: $x^2 - 1 + \ln x = x^2$ و منه $\ln x = 1$ إذن $x = e$........0.25

كتابة معادلة المماس (T):

0.25 .... $(T): y = f'(e)(x-e) + f(e) = (x-e) + e - \frac{1}{e} = x - \frac{1}{e}$

4. إنشاء المستقيمين (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f) 0.5



5. g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ

$$g(x) = x - \frac{\ln|x|}{x}$$

أ. نبين أن الدالة g فردية:

$\mathbb{R}-\{0\}$ متناظر بالنسبة لـ 0

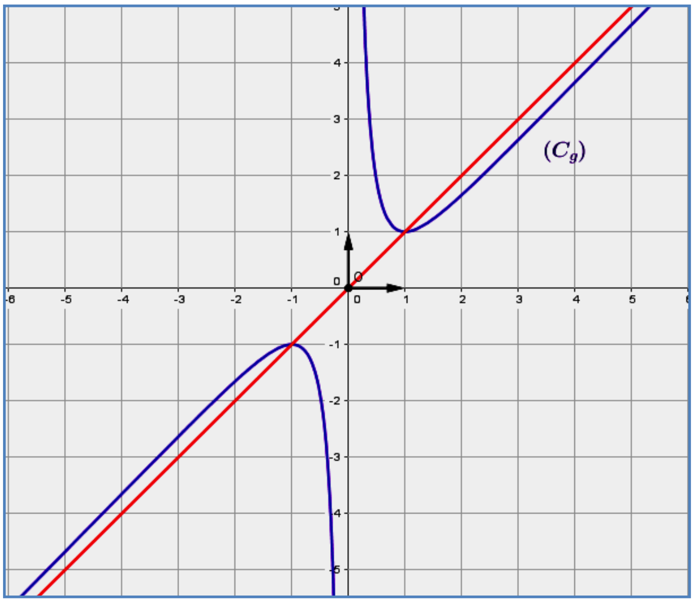
$$g(-x) = -x - \frac{\ln|-x|}{-x} = -x + \frac{\ln|x|}{x}$$

إذن $g(-x) = -\left(x - \frac{\ln|x|}{x}\right) = -g(x)$:

g دالة فردية 0.5

لإنشاء (C_g) :....... 0.5

لدينا (C_g) منطبق على (C_f) على $]0;+\infty[$ و نظير (C_f) بالنسبة للمبدأ O على $]-\infty;0[$



8. m وسيط حقيقي ، عين مجموعة قيم m حتى يكون للمعادلة $g(x)=m$ حلين متمايزين .

من التمثيل البياني لـ(C_g) يكون *للمعادلة* $g(x)=m$ حلين متمايزين إذا كان $m \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$...$0.5$

7. h الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $h(x) = \frac{x^2-1-\ln(x-1)}{x-1}$

إثبات أن $h(x) = f(x-1)+2$:

$$f(x-1)+2 = (x-1) - \frac{\ln(x-1)}{x-1} + 2 = \frac{(x-1)^2 - \ln(x-1) + 2(x-1)}{x-1} = \frac{x^2-2x+1-\ln(x-1)+2x+2}{x-1}$$

و منه $h(x) = \frac{x^2-1-\ln(x-1)}{x-1} = f(x-1)+2$.............$0.5$

. شرح كيف يمكن رسم المنحني (C_h) انطلاقا من (C_f) : بما أن $h(x) = f(x-1)+2$ إذن (C_h) هو صورة (C_f)

بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$............0.25

انتهى حل الموضوع الثاني