الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
امتحان بكالوريا تجريبي
الشعبة : تقني رياضي

ثانوية ابن عليوي صالح
دورة ماي 2021

اختبار في مادة الرياضيات — المدة : 04 سا

اختر احد الموضوعين الاتيين

**الموضوع الاول**

**التمرين الأول** ( 4.5 نقاط)

/1 $(V_n)$ متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حدها الأول $V_0$ و أساسها $q$ حيث $\begin{cases}\ln V_0+\ln V_2=2ln2\\ e^{V_0}\times e^{V_1}=e^6\end{cases}$

ا) احسب $V_1$ و$V_0$ ثم استنتج قيمة الأساس $q$

ب) نضع $V_0=4$ و $q=\frac{1}{2}$ عبر عن $V_n$ بدلالة $n$ ثم احسب $\lim V_n$

ج) احسب بدلالة $n$ المجموع : $S_n=\ln V_0+\ln V_1+\ldots\ldots\ldots+\ln V_n$

/2 نعتبر المتتالية $(U_n)$ المعرفة $\mathbb{N}$على بـ: $U_0=6$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $U_{n+1}=\sqrt{9U_n+10}$

ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $6\leq U_n\leq 10$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية $(U_n)$ ثم استنتج انها متقاربة

ج) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $10-U_{n+1}\leq\frac{1}{2}(10-U_n)$

د) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $0\leq 10-U_n\leq V_n$

ه) استنتج نهاية المتتالية $(U_n)$

**التمرين الثاني** (4 نقاط)

اختر الاقتراح الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الاتية

/1 - صندوق $U_1$ يحتوي على 6 كريات حمراء و4 سوداء و صندوق$U_2$ يحتوي على 3 كريات حمراء و 1 كرية زرقاء

جميع الكرات متماثلة .نسحب عشوائيا كرية واحد من الصندوق $U_1$ و كرية واحدة من الصندوق $U_2$

ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات السوداء المسحوبة فان امله الرياضياتي هو:

ا) $\frac{3}{5}$ ب) $\frac{2}{5}$ ج) 1

- نضيف $n$ كرية سوداء الى الصندوق $U_1$ و $n$ كرية حمراء الى الصندوق $U_2$

ونسحب كرية من الصندوق$U_1$ و كرية من الصندوق $U_2$

فأن قيمة $n$ بحيث يكون احتمال الحصول على كرتين من لونين مختلفين $\frac{7}{12}$ هي

ا) 1 ب) 2 ج) 3

/2 - الشكل الاسي للعدد المركب $Z=-\sin\theta+i\cos\theta$ هو

ا) $e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$ ب) $2e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$ ج) $e^{i(\pi-\theta)}$

- العدد : $(1+i)^{1442}$ يساوي

ا) $2^{721}$ ب) $i\,2^{721}$ ج) $2^{721}(1+i)$

**التمرين الثالث** ( 4.5 نقاط)

1/ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E)$ ذات المجهول $(x,y)$ التالية $2021x - 2020y = 5 \quad ....(E)$

ا) بين ان العددين 2020 و 2021 اوليان فيما بينهما و استنتج ان المعادلة $(E)$ تقبل حلولا

ب) بين انه اذا كانت الثنائية $(x\,,y)$ حلا للمعادلة $(E)$ فان $x \equiv 0[5]$

ج) استنتج حلا خاصا $(x_0\,,y_0)$ حيث $2022 \leq x_0 \leq 2027$ ثم حل المعادلة $(E)$

2/ عين الاعداد الصحيحة النسبية $a$ بحيث : $\begin{cases} a \equiv 5\ [2020] \\ a \equiv 0\ [2021] \end{cases}$

3/ ا) ادرس و حسب قيم العدد الطبيعي $n$ باقي القسمة الاقليدية للعدد $5^n$ على 9

ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n$: $2021^{1962n+1954} + 1442^{1440n+12} + 4 \equiv 0[9]$

ج) عين الثنائيات $(x\,,y)$ من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ حلول المعادلة $(E)$ بحيث : $5^{y-x} \equiv 8[9]$

---

**التمرين الرابع** (7 نقاط)

I- $g$ الدالة المعرفة على $]0\,;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x + 1 - (2x+1)lnx$

1/ ا) احسب $g'(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير الدالة $g'$

ب) بين انه من اجل كل $x$ من $]0\,;+\infty[$ $g'(x) < 0$

ج) احسب نهايتي الدالة $g$ عند كل من $+\infty$ و $0$ ثم شكل جدول تغيراتها

2/ بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $1.83 < \alpha < 1.84$

3/ حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$

II- $f$ الدالة المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2lnx}{x^2+x}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o.\vec{i}\,;\vec{j})$ وحدة الطول

( على محور الفواصل $1cm$ و على محور التراتيب $4cm$)

1/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و فسر النتيجتين هندسيا

2/ ا) بين انه من اجل كل $x$ من $]0\,;+\infty[$ $f'(x) = \frac{2g(x)}{(x^2+x)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ و شكل جدول تغيراتها

3/ بين ان $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ و استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

4/ اكتب معادلة المماس $(T)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1

5/ أنشئ المماس $(T)$ و المنحنى $(C_f)$

6/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة $f(x) = mx - m$

7/ نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $]0\,,+\infty[$ بـ : $h(x) = [f(x)]^2$

ادرس اتجاه تغير الدالة $h$ و شكل جدول تغيراتها

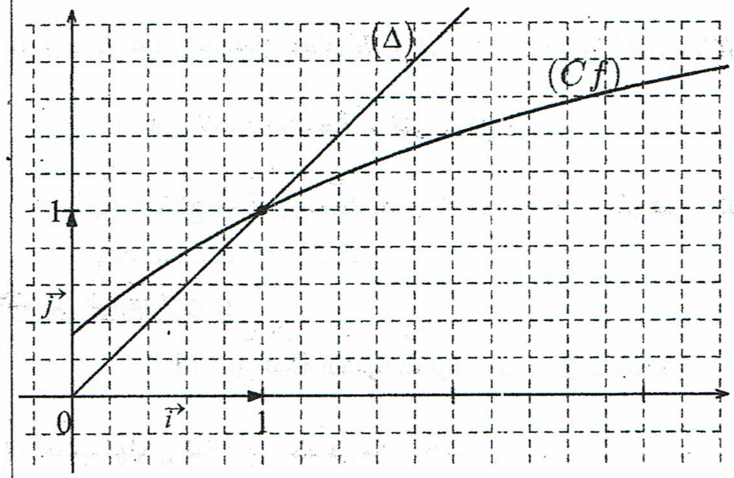
انتهى الموضوع الأول

**التمرين الأول ( 4,5 ن ):**

$f$ الدالة العددية المعرفة و المتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+3}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

و المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x$ .




$\alpha$ عدد حقيقي موجب . $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0$

حيث $u_0=\alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ؛ $u_{n+1}=f(u_n)$

I) عين قيمة $\alpha$ حتى تكون المتتالية $(u_n)$ ثابتة

II) نضع في كل ما يلي $\alpha=0$

1) أ) انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ ( دون حساب الحدود )

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ و تقاربها

2) أ) برهن انه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0\leq u_n<1$

ب) بين أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما ، ثم برر تقاربها

3) $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

ا) برهن أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول

ب) عبر بدلالة $n$ عن $v_n$ ، ثم استنتج $u_n$ بدلالة $n$ . احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4) احسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث: $S_n=1+\dfrac{v_{2021}}{v_{2020}}+......+\dfrac{v_{n+2019}}{v_{2020}}$

5) احسب بدلالة $n$ المجموع $T$ حيث: $T=\ln(|v_n|)+\ln(|v_{n+1}|)+.....+\ln(|v_{n+2019}|)$

**التمرين الثاني( 4 ن ):**

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي :

5 كريات حمراء مرقمة كما يلي: 0 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2 و 5 كريات خضراء مرقمة كما يلي : 0 ، 0 ، 1 ، 2 ، 2

نسحب عشوائيا من الكيس 4 كريات في آن واحد

1) أحسب احتمال كلا من الأحداث التالية :

A : الحصول على 4 كريات من نفس اللون
B : الحصول على 4 كريات أرقامها يمكن أن تشكل العدد 2020
C : الحصول على 4 كريات مجموع أرقامها يساوي 4

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب 4 كريات الرقم الأكبر من بين الأرقام الأربعة

أ) عين قيم X الممكنة ، ثم عرف قانون احتماله
ب) احسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X
ج) احسب احتمال الحدث : $|X-1|=1$

**التمرين الثالث( 4,5 ن ):**

1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الإقليدية للعدد $2^n$ على 5

2) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3}-2\times2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على 5

3) بين أن العدد 131 أولي

4) $a$ و $b$ عددان طبيعيان حيث $m=PPCM(a,b)$ و $d=PGCD(a,b)$

أ) عين الأعداد الطبيعية $n$ التي تحقق : $\begin{cases}3m+7d=2^n-48\\ a\times b=5m\end{cases}$

ب) استنتج قيمة $n$ بحيث يكون $7<n<15$ ؛ ثم عين الثنائيات $(a,b)$

**التمرين الرابع( 7 ن ):**

I) $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x)=1-(1+2x)e^{2x}$

1) أحسب نهايتي الدالة $g$ عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة $g$ و شكل جدول تغيراتها

3) أحسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x+3-xe^{2x}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب نهايتي الدالة $f$ عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

2) أ - بين أن المنحني $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له

ب – أدرس الوضع النسبي للمنحني $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta)$

3) أ – بين أن من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا: $f'(x)=g(x)$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ و شكل جدول تغيراتها

4) أ - بين أن المنحني $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما على الترتيب $\alpha$ و $\beta$ حيث:

$-3,05<\alpha<-3$ و $0,75<\beta<0,8$

ب- بين أن المنحني $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يوازي المستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلة له

ج- أنشئ $(T)$ ؛ $(\Delta)$ و $(C_f)$

5) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول $x$ : $f(x)=x+m$

6) $h$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة : $h(x)=\dfrac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x}$

أ – بين أن من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم $x$ لدينا: $h(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

ب- أحسب $h'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $h$ و شكل جدول تغيراتها ( دون حساب عبارة الدالة $h'$ )

تصحيح باك تجريبي 2021

3 ع ت م - رياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول (4,5 ن)

1) $(v_n)$ هندسية حدودها موجبة حدها الأول $v_0$ وأساسها $q$

$$\begin{cases}\ln v_0+\ln v_2=2\ln 2\\ e^{v_0}\times e^{v_1}=e^6\end{cases}$$

أ) حساب $v_0, v_1, v_2$ و $q$

$v_1^2=4$ يعني $\ln v_0+\ln v_2=2\ln 2$ ومنه $\boxed{v_1=2}$

$v_0+v_1=6$ يعني $e^{v_0}\times e^{v_1}=e^6$ ومنه $\boxed{v_0=4}$

إذن $q=\frac{v_1}{v_0}=\frac{1}{2}$

ب) $v_n=v_0q^n=4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\lim_{n\to\infty} v_n=0$ لأن $-1<\frac{1}{2}<1$

ج) $S_n=\ln v_0+\ln v_1+\dots+\ln v_n$

$\ln v_n=(-\ln 2)n+\ln 4$

نضع $w_n=(-\ln 2)n+\ln 4$ ، $(w_n)$ حسابية أساسها $r=-\ln 2$ ، $w_0=\ln 4$

$S_n=w_0+w_1+\dots+w_n$

$=\frac{n+1}{2}\left[(-\ln 2)n+2\ln 4\right]$

2) $u_{n+1}=\sqrt{9u_n+10}$ ، $u_0=6$

أ) البرهان بالتراجع $6\le u_n\le 10$

$6\le u_0\le 10$ محققة لأن $u_0=6$ إذن $P(0)$ صحيحة

نفرض صحة $P(n)$ : $6\le u_n\le 10$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ : $6\le u_{n+1}\le 10$

$6\le u_n\le 10$ ومنه $54\le 9u_n\le 90$

$64\le 9u_n+10\le 100$

$6\le 8$ ، $8\le\sqrt{9u_n+10}\le 10$

$6\le u_{n+1}\le 10$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $6\le u_n\le 10$ من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$

ب) $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+9u_n+10}{\sqrt{9u_n+10}+u_n}$

$-x^2+9x+10=0$ ← $x=u_n$

$x_2=10$ ، $x_1=-1$

| $u_n$ | $-\infty$ | $-1$ | $6$ | $10$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-u_n^2+9u_n+10$ | | | $+$ | $0$ | |

ومنه $(u_n)$ متزايدة تماما لأن $u_{n+1}-u_n>0$

* $(u_n)$ متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 10 فهي متقاربة

ج) من أجل كل عدد طبيعي $n$

$10-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(10-u_n)$

$10-u_{n+1}=\frac{9}{10+\sqrt{9u_n+10}}(10-u_n)$

$6\le u_n\le 10$ ومنه $64\le 9u_n+10\le 100$

ومنه $8\le\sqrt{9u_n+10}\le 10$

ومنه $18\le\sqrt{9u_n+10}$ أي $18\le 10+\sqrt{9u_n+10}$

ومنه $\frac{1}{18}\ge\frac{1}{10+\sqrt{9u_n+10}}$

أي $\frac{9}{18}\ge\frac{9}{10+\sqrt{9u_n+10}}$

$\frac{9}{10+\sqrt{9u_n+10}}\le\frac{1}{2}$

$\frac{9}{10+\sqrt{9u_n+10}}(10-u_n)\le\frac{1}{2}(10-u_n)$

$10-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(10-u_n)$

د) $0\le 10-u_n\le v_n$

ومنه $u_n\le 10$ ، $\boxed{0\le 10-u_n}$

؟ $10-u_n\le v_n$

$10-u_1\le\frac{1}{2}(10-u_0)$

$10-u_2\le\frac{1}{2}(10-u_1)$

⋮

$10-u_n\le\frac{1}{2}(10-u_{n-1})$

$(10-u_1)(10-u_2)\dots(10-u_n)\le\left(\frac{1}{2}\right)^n(10-u_0)(10-u_1)\dots(10-u_{n-1})$

$\frac{\cancel{(10-u_1)}\cancel{(10-u_2)}\dots(10-u_n)}{\cancel{(10-u_1)}\cancel{(10-u_2)}\dots\cancel{(10-u_{n-1})}}\le\left(\frac{1}{2}\right)^n(10-u_0)$

$10-u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n 4$

$10-u_n\le v_n$

ومنه $0\le 10-u_n\le v_n$

هـ) $\lim_{n\to+\infty}v_n=0$ حسب مبرهنة الحصر

$\lim_{n\to+\infty}(10-u_n)=0$ ومنه $\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=10}$

التمرين الثاني (4 ن)

1) $U_1$ ← 6 بيضاء و 4 سوداء

$U_2$ ← 3 كرات ... و 1

نسحب كرة من $U_1$ وكرة من $U_2$

$C_{10}^1\times C_4^1=40$ عدد الحالات الممكنة

X يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة

قيم X هي $\{0,1\}$

| $x_i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{24}{40}$ | $\frac{16}{40}$ |

$P(X=0)=\frac{C_6^1\times C_4^1}{40}=\frac{24}{40}$

$P(X=1)=\frac{C_4^1\times C_4^1}{40}=\frac{16}{40}$

$E(X)=0\times\frac{24}{40}+1\times\frac{16}{40}=\frac{2}{5}$

2) نضيف $n$ كرة سوداء لـ $U_1$ فتصبح 6 بيضاء و $n+4$ سوداء

و $n$ كرة لـ $U_2$ فتصبح $n+3$

نسحب كرة من $U_1$ وكرة من $U_2$

عدد الحالات الممكنة $C_{n+10}^1\times C_{n+4}^1$

$=(n+10)(n+4)$

$=n^2+14n+40$

A الكرتين المسحوبتين من نفس اللون

$P(A)=\frac{C_6^1\times C_1^1+C_{n+4}^1\times C_{n+3}^1+C_{n+4}^1\times C_1^1}{n^2+14n+40}$

$=\frac{6+(n+4)(n+3)+n+4}{n^2+14n+40}$

$=\frac{n^2+8n+22}{n^2+14n+40}$

$P(A)=\frac{7}{12}$ أي $\frac{n^2+8n+22}{n^2+14n+40}=\frac{7}{12}$

أي $5n^2-2n-16=0$ ، $\Delta=324$ ، $n=-\frac{8}{5}$ ، $\boxed{n=2}$

3) أ) نكتب $z=-\sin\theta+i\cos\theta$ على الشكل الأسي

$z=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$

$\cos\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ ، $-\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ لأن

ب) العدد $(1+i)^{1442}=i\,2^{721}$

لدينا $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$

$(1+i)^{1442}=(\sqrt{2})^{1442}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{1442}$

$(1+i)^{1442}=2^{721}\left(e^{i\frac{1442\pi}{4}}\right)$

$=2^{721}\left(\cos\left(360\pi+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(360\pi+\frac{\pi}{2}\right)i\right)$

$=2^{721}(0+i)=\boxed{i\,2^{721}}$

التمرين 3 (4 ن)

(E) ... $2021x-2020y=5$

1) أ) $2020=2^2\times5\times101$

$2021=43\times47$

$PGCD(2020,2021)=1$

إذن 2021 ، 2020 أوليان فيما بينهما

* لدينا 1 يقسم 5 إذن (E) تقبل حلولا

ب) $(x,y)$ حل لـ (E) أي $2021x-2020y=5$

منه $2021x=2020y+5$

$2021x=5[404y+1]$

بما أن $2021x\equiv0[5]$ و 2021 ، 5 أوليان

ومنه $x\equiv0[5]$

ج) تعيين $(x_0,y_0)$ حل لـ (E)

$2022\le x_0\le 2027$

$x\equiv0[5]$ يعني $x=5k$

ومنه $2022\le 5k\le 2027$

$404,4\le k\le 405,4$ ، $\boxed{K=405}$

ومنه $\boxed{x_0=2025}$

$2021(2025)-2020y_0=5$ نجد $\boxed{y_0=2026}$

د) حل المعادلة

$$\begin{cases}2021x-2020y=5\\2021(2025)-2020(2026)=5\end{cases}$$

$2021(x-2025)=2020(y-2026)$

ومنه $2021 \mid 2020(y-2026)$

و 2021 أولي مع 2020 حسب غوص

$2021 \mid y-2026$ أي $y-2026 = 2021k$

أي $\boxed{y = 2021k + 2026}$

ومنه $2021(x-2025) = 2020(2021k)$

أي $\boxed{x = 2020k + 2025}$

$S = \{(2020k+2025\,,\,2021k+2026)\,/\,k \in \mathbb{Z}\}$

2) معناه $\begin{cases} a \equiv 5\,[2020] \\ a \equiv 0\,[2021] \end{cases}$

$\begin{cases} a = 2020\alpha + 5 \\ a = 2021\beta \end{cases}$

$2020\alpha + 5 = 2021\beta$

أي $2021\beta - 2020\alpha = 5$

$\beta = x = 2020k + 2025$

$\alpha = y = 2021k + 2026$

ومنه

$a = 2020(2021k + 2026) + 5$

$= 4082420k + 4092525$

3) أ) دراسة بواقي القسمة $5^n$ على 9

$5^0 \equiv 1\,[9]$ $\quad 5^1 \equiv 5\,[9]$ $\quad 5^2 \equiv 7\,[9]$

$5^3 \equiv 8\,[9]$ $\quad 5^4 \equiv 4\,[9]$ $\quad 5^5 \equiv 2\,[9]$

$5^6 \equiv 1\,[9]$ البواقي دورية ودورها 6

| $n =$ | $6k$ | $6k+1$ | $6k+2$ | $6k+3$ | $6k+4$ | $6k+5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $5^n \equiv$ | 1 | 5 | 7 | 8 | 4 | 2 [9] |

ب) $2021^{1962n+1954} + 1442^{1440n+12} + 4 \equiv 0\,[9]$

$2021^{1962n+1954} \equiv 5^{1962n+1954}\,[9]$

$\equiv 5^{6\times 327n + 325\times 6 + 4}\,[9]$

$\equiv 5^{6\times 327n} \times 5^{325\times 6 + 4}\,[9]$

$\equiv 1 \times 4\,[9]$

$\equiv 4\,[9]$

$1442^{1440n+12} \equiv 2^{1440n+12}\,[9]$

$\equiv 2^{3(480n+4)}\,[9]$

$\equiv 8^{480n+4}\,[9]$

$\equiv (-1)^{480n+4}\,[9]$

$\equiv 1\,[9]$

$2021^{1962n+1954} + 1442^{1440n+12} + 4 \equiv$

$\equiv 4+1+4\,[9]$

$\equiv 0\,[9]$

ج) الثنائيات $(x;y)$ حلول لـ $(E)$ حيث

$5^{y-x} \equiv 8\,[9]$

$5^{2021k+2026-2020k-2025} \equiv 8\,[9]$

$5^{k+1} \equiv 8\,[9]$

أي $k+1 = 6k'+3$

أي $\boxed{k = 6k'+2}$ ومنه

$y = 2021(6k'+2) + 2026$

$= 12126k' + 6068$

$x = 2020(6k'+2) + 2025$

$x = 12120k' + 6065$

$S = \{(12120k'+6065\,,\,12126k'+6068)\,/\,k' \in \mathbb{N}\}$

## التمرين 4 (7ن)

I) $g(x) = x+1-(2x+1)\ln x$

$D_g = ]0,+\infty[$

1) أ) $g'(x) = 1 - 2\ln x - \frac{2x+1}{x}$

ب) $g''(x) = \frac{-2x+1}{x^2}$

$g''(x) = 0$ لما يكون $x = \frac{1}{2}$

| $x$ | 0 | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | ‖ | + | 0 | − | |

و $g'$ متزايدة تماما على $]0,\frac{1}{2}]$

و $g'$ متناقصة تماما على $[\frac{1}{2},+\infty[$

ج)

| $x$ | 0 | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | ‖ | + | 0 | − | |
| $g'(x)$ | ‖ | ↗ | $-3+2\ln 2$ | ↘ | |

$g'(\frac{1}{2}) = -3 + 2\ln 2 \simeq -1{,}61$

من أجل كل $x$ من $]0,+\infty[$ : $g'(x) < 0$

إذن $g$ متناقصة تماما على $]0,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left[1 + \frac{1}{x} - 2\ln x - \frac{\ln x}{x}\right] = \boxed{-\infty}$

| $x$ | 0 | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | | − | | |
| $g(x)$ | ‖ | $+\infty$ | ↘ 0 ↘ | | $-\infty$ |

2) $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد $1{,}83 < \alpha < 1{,}84$

$g$ مستمرة ومتناقصة تماما على $[1{,}83;1{,}84]$

$g(1{,}83) = 0{,}013$ $\quad g(1{,}84) = -0{,}013$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد

$1{,}83 < \alpha < 1{,}84$ حيث $\boxed{g(\alpha) = 0}$

3)

| $x$ | 0 | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | + | 0 | − | |

II) $D = ]0,+\infty[\,;\; f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$

1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty \quad \left(\frac{-\infty}{0^+}\right)$

| $x$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $x^2+x$ | ‖ | + |

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\ln x}{x} \times \frac{1}{x+1} = 0 \times 0 = 0$

$x = 0$ م.م عمودي و $y = 0$ م.م أفقي

2) أ) $f'(x) = \frac{\frac{2}{x}(x^2+x) - (2x+1)2\ln x}{(x^2+x)^2}$

$f'(x) = \frac{2g(x)}{(x^2+x)^2}$ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

| $x$ | 0 | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | ‖ | $-\infty$ ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ 0 | |

$f$ متزايدة تماما على $]0,\alpha]$

$f$ متناقصة تماما على $[\alpha,+\infty[$

3) $f(\alpha) = \frac{2\ln\alpha}{\alpha^2+\alpha}$

$g(\alpha) = 0$ يعني $\ln\alpha = \frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$

بالتعويض نجد $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

$f(\alpha)$ حصر $1{,}83 < \alpha < 1{,}84$

ومنه $0{,}232 < f(\alpha) < 0{,}234$

4) (T) مماس لـ (C) في النقطة ذات الفاصلة 1

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = x - 1$

5) أ) $1/$ ج

6) المناقشة البيانية

$f(x) = mx - m$

$(\Delta_m)$ تشمل النقطة الثابتة ... معادلتها $y = mx - m$

$m(1) - m = 0$ أي $A(1,0)$

$m \in ]-\infty,0]$ حل وحيد

$m \in ]0,1[$ حلان متمايزان

$m \in ]1,+\infty[$ حلان متمايزان

$m = 1$ حل مضاعف

7) $h(x) = [f(x)]^2$

$D_h = ]0,+\infty[$

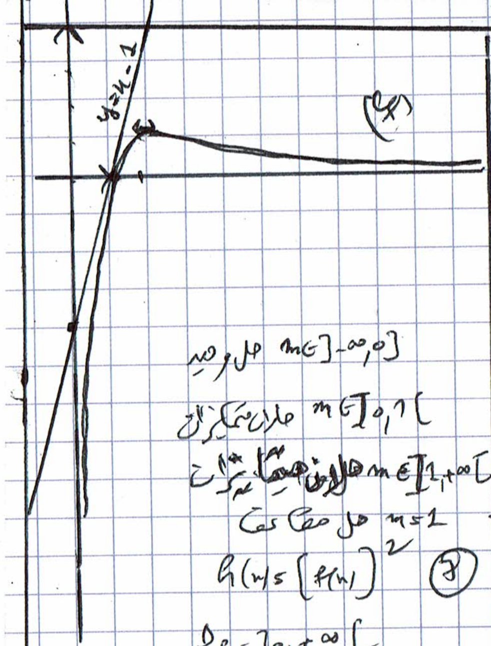
$h'(x) = 2 \times f'(x) \times f(x)$

| $x$ | 0 | | 1 | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | + | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | ‖ | − | 0 | + | | + | |
| $2 f'(x) f(x)$ | ‖ | − | 0 | + | 0 | − | |

$h$ متناقصة تماما على $]0,1]$ و $[\alpha,+\infty[$

$h$ متزايدة تماما على $[1,\alpha]$

| $x$ | 0 | | 1 | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | ‖ | − | 0 | + | 0 | − | |
| $h(x)$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | 0 | ↗ | $(f(\alpha))^2$ | ↘ | 0 |



تصحيح الموضوع 2 - بكالوريا 2021 - شعبة رياضيات - تقني رياضي

## التمرين الأول (4,5 ن)

I) $D=[0,+\infty[$ $\quad f(x)=\dfrac{3x+1}{x+3}$

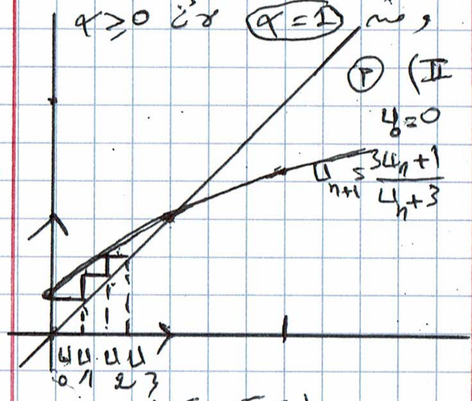
$(u_n)$ ثابتة يعني $u_{n+1}=u_n$

لدينا $u_{n+1}=f(u_n)=\dfrac{3u_n+1}{u_n+3}$ ، $u_0=\alpha$

ومنه $\alpha^2=1$ أي $\alpha=\dfrac{3\alpha+1}{\alpha+3}$

ومنه $\alpha\geq 0$ لأن $\boxed{\alpha=1}$

II) 1) $u_0=0$ $\quad u_{n+1}=\dfrac{3u_n+1}{u_n+3}$



2) $(u_n)$ متزايدة تماما ومتقاربة نحو 1

ب) P: من أجل كل عدد طبيعي $n$: $0\leq u_n<1$

$n=0$ $\quad u_0=0$ $\quad 0\leq u_0<1$

صحيحة $P(0)$

نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن صحة $P(n+1)$

$P(n)$ صحيحة ، $0\leq u_n<1$

$P(n+1)$ صحيحة ، $0\leq u_{n+1}<1$ ؟

$f$ متزايدة تماما و $0\leq u_n<1$

على $[0,+\infty[$ ومنه $f(0)\leq f(u_n)<f(1)$

أي $\dfrac{1}{3}\leq u_{n+1}<1$ و $0\leq\dfrac{1}{3}$

ومنه $0\leq u_{n+1}<1$

من أجل كل عدد طبيعي $n$: $0\leq u_n<1$

$(u_n)$ محدودة

ج) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3u_n+1}{u_n+3}-u_n=\dfrac{1-u_n^2}{u_n+3}$

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{u_n+3}$

لدينا $0\leq u_n<1$ ومنه

$0<1-u_n\leq 1$ / $1\leq u_n+1<2$ / $3\leq u_n+3<4$

$u_{n+1}-u_n>0$ و $(u_n)$ متزايدة تماما

4) $(u_n)$ متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 1

فهي متقاربة

3) $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

أ) $(v_n)$ هندسية يعني $v_{n+1}=v_n\times q$

$v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\dfrac{2u_n-2}{4u_n+2}$

$v_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u_n-1}{u_n+1}\right)=\boxed{\dfrac{1}{2}v_n}$

$(v_n)$ هندسية أساسها $\boxed{q=\frac{1}{2}}$ وحدها الأول

$v_0=\dfrac{u_0-1}{u_0+1}=\boxed{-1}$

ب) $v_n=v_0q^n=-1\left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$ $\quad v_nu_n+v_n=u_n-1$

ومنه $u_n(v_n-1)=-v_n-1$ ومنه $u_n=\dfrac{-v_n-1}{v_n-1}$

و $u_n=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{-1\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{-1}{-1}=1$

لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

$-1<\frac{1}{2}<1$

4) $S_n=1+\dfrac{v_{2021}}{v_{2020}}+\dfrac{v_{2022}}{v_{2020}}+\dots+\dfrac{v_{n+2019}}{v_{2020}}$

$=\dfrac{v_{2020}+v_{2021}+v_{2022}+\dots+v_{n+2019}}{v_{2020}}$

$=\dfrac{1}{\cancel{v_{2020}}}\left[\cancel{v_{2020}}\left(\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}\right)\right]$

$=-2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right)=\boxed{2-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$T_n=\ln(|v_n|)+\ln(|v_{n+1}|)+\dots+\ln(|v_{n+2019}|)$

لدينا $\ln(|v_n|)=\ln\left(\left|-1\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|\right)=\ln\left(\left|-1\right|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

$\ln(|v_n|)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n=n\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\boxed{-n\ln 2}$

نضع $w_n=(-\ln 2)n$ حيث $(w_n)$ متتالية حسابية

أساسها $\boxed{r=-\ln 2}$ وحدها الأول $\boxed{w_0=0}$

$T_n=w_n+w_{n+1}+\dots+w_{n+2019}$ / 2020 حد

$=\dfrac{2020}{2}\left[w_n+w_{n+2019}\right]$

$=1010\left[(-\ln 2)n+(-\ln 2)(n+2019)\right]$

$T_n=1010\left[(-2\ln 2)n+(-\ln 2)(2019)\right]$

## التمرين 2 (4 ن)

10 { 5 كريات تحمل 2,2,1,1,0

5 كريات حمراء تحمل 2,2,1,0,0

سحب 4 كريات في آن واحد

عدد الحالات $C_{10}^4=210$

1) A: 4 كريات من نفس اللون

$P(A)=\dfrac{C_5^4+C_5^4}{210}=\boxed{\dfrac{1}{21}}$

B: 4 كريات أرقامها تشكل العدد 2020

$P(B)=\dfrac{C_3^2\times C_4^2}{210}=\dfrac{18}{210}=\boxed{\dfrac{3}{35}}$

C: 4 كريات مجموع أرقامها يساوي 4

$0+1+1+2=4$ / $0+0+2+2=4$

$P(C)=\dfrac{C_3^2\times C_4^2+C_3^1\times C_3^2\times C_4^1}{210}=\boxed{\dfrac{9}{35}}$

2) X يرفق بكل سحب 4 كريات الرقم الأكبر

قيم X هي: 1 أو 2

يكون 1 هو الرقم الأكبر لما نأخذ 4 أرقام من بين

1,1,1,0,0,0

$P(X=1)=\dfrac{C_6^4}{210}=\dfrac{15}{210}=\dfrac{1}{14}$

ومنه $P(X=2)=1-\dfrac{1}{14}=\dfrac{13}{14}$

| $x_i$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | 1/14 | 13/14 |

ب) الأمل

$E(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i$

$=\dfrac{1}{14}+\dfrac{26}{14}=\dfrac{27}{14}$

ج) $|X-1|=1$ معناه $X-1=1$ أو $X-1=-1$

ومنه $X=2$ أو $\boxed{X=0}$ مرفوضة

$P(|X-1|=1)=P(X=2)=\boxed{13/14}$

## التمرين 3 (4,5 ن)

1) بواقي قسمة $2^n$ على 5

$2^3\equiv 3[5]$ / $2^2\equiv 4[5]$ / $2^1\equiv 2[5]$ / $2^0\equiv 1[5]$

$2^4\equiv 1[5]$ البواقي دورية ودورها 4

| $n=$ | 4K | 4K+1 | 4K+2 | 4K+3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $2^n\equiv$ | 1 | 2 | 4 | 3 | [5] |

2) باقي قسمة $\left(2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على 5

لدينا $2014\equiv 2^2[5]$ ومنه $2014\equiv 4[5]$

إذن $2014^{2n+1}\equiv (2^2)^{2n+1}[5]$ أي $2014^{2n+1}\equiv 2^{4n+2}[5]$

$\equiv\boxed{4[5]}$

$2016\equiv 1[5]$ ومنه $2016^{8n}\equiv 1[5]$ ومنه $2\times 2016^{8n}\equiv 2[5]$

$2017\equiv 2[5]$ ومنه $2017^{4n+3}\equiv 2^{4n+3}[5]$ ومنه $2017^{4n+3}\equiv 3[5]$

إذن $2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\equiv 4-2+3[5]$

$\equiv 0[5]$

الباقي هو: 0

3) $\sqrt{131}\simeq 11{,}44$

131 لا يقبل القسمة على 2, 3, 5, 7, 11

ومنه 131 عدد أولي

4) $d=PGCD(a,b)$ $\quad m=PPCM(a,b)$

أ) $\begin{cases}3m+7d=2^n-48\\ a\times b=5m\end{cases}$

$d = PGCD(a,b) = 5$ يعني $a \times b = 5m$

منه يوجد $a', b'$ عددان طبيعيان حيث

$PGCD(a',b') = 1$ , $b = 5b'$ , $a = 5a'$

لدينا $m = \frac{a \times b}{d} = a'b'd$

و $3m + 7d = 2^n - 48$ تعني

$3a'b'd + 7d = 2^n - 48$ ومنه

أي $3(5a'b') + 7(5) = 2^n - 48$

أي $3(5a'b') + 7(5) + 48 = 2^n$

$2^n = 5[3a'b' + 7 + 9] + 3$

$2^n \equiv 5[3a'b' + 16] + 3$

أي $2^n \equiv 3[5]$ ومن السؤال ① نجد $n = 4k+3$

② $7 < n < 15$ يعني $7 < 4k+3 < 15$ منه $1 < k < 3$ أي $k = 2$ منه $n = 11$

إذن $2^{11} = 5[3a'b' + 16] + 3$

أي $2045 = 5[3a'b' + 16]$

أي $a'b' = 131$ ، 131 عدد أولي

إذن $(a',b') = (1,131)$ أو $(131,1)$

منه $(a,b) \in \{(5,655),(655,5)\}$.

## التمرين ④ : 07

I) $D = \mathbb{R}$ $g(x) = 1 - (1+2x)e^{2x}$

① $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 - e^{2x} - 2xe^{2x} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

$g'(x) = -[2e^{2x} + 2e^{2x}(2x+1)] = (-4x-4)e^{2x}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-4x-4$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

ومنه $g$ متزايدة تماما على $]-\infty,-1]$

و متناقصة تماما على $[-1,+\infty[$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g(x)$ | $1$ ↗ | $1+e^{-2}$ | ↘ $-\infty$ |

③ $g(0) = 0$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |

II) $D = \mathbb{R}$ $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$

① $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + 3 - \frac{1}{2}(2xe^{2x}) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 + \frac{3}{x} - e^{2x}\right) = -\infty$

②أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x+3) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}(2xe^{2x}) = 0$

ب) معادلة (Δ) مقارب مائل عند $-\infty$ ($y = x+3$)

ج) الوضعية :

$f(x) - (x+3) = -xe^{2x}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| الوضعية | | (Cf) فوق (Δ) | A | (Cf) تحت (Δ) | |

نقطة تقاطع $A(0;3)$

③ أ- من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ؛

$f'(x) = 1 - (e^{2x} + 2xe^{2x}) = 1 - (1+2x)e^{2x} = g(x)$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

$f$ متزايدة تماما على $]-\infty,0]$ و متناقصة تماما على $[0,+\infty[$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $3$ | ↘ $-\infty$ |

④ أ- $f$ مستمرة ورتيبة على $[-3{,}05 ; -3]$

$f(-3) = 0{,}0074$ $f(-3{,}05) = -0{,}043$

$f(-3{,}05) \times f(-3) < 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-3{,}05 < \alpha < -3$ تحقق $f(\alpha) = 0$

− $f$ مستمرة ومتناقصة تماما على $[0{,}75 ; 0{,}8]$

$f(0{,}8) = -0{,}16$ $f(0{,}75) = 0{,}388$

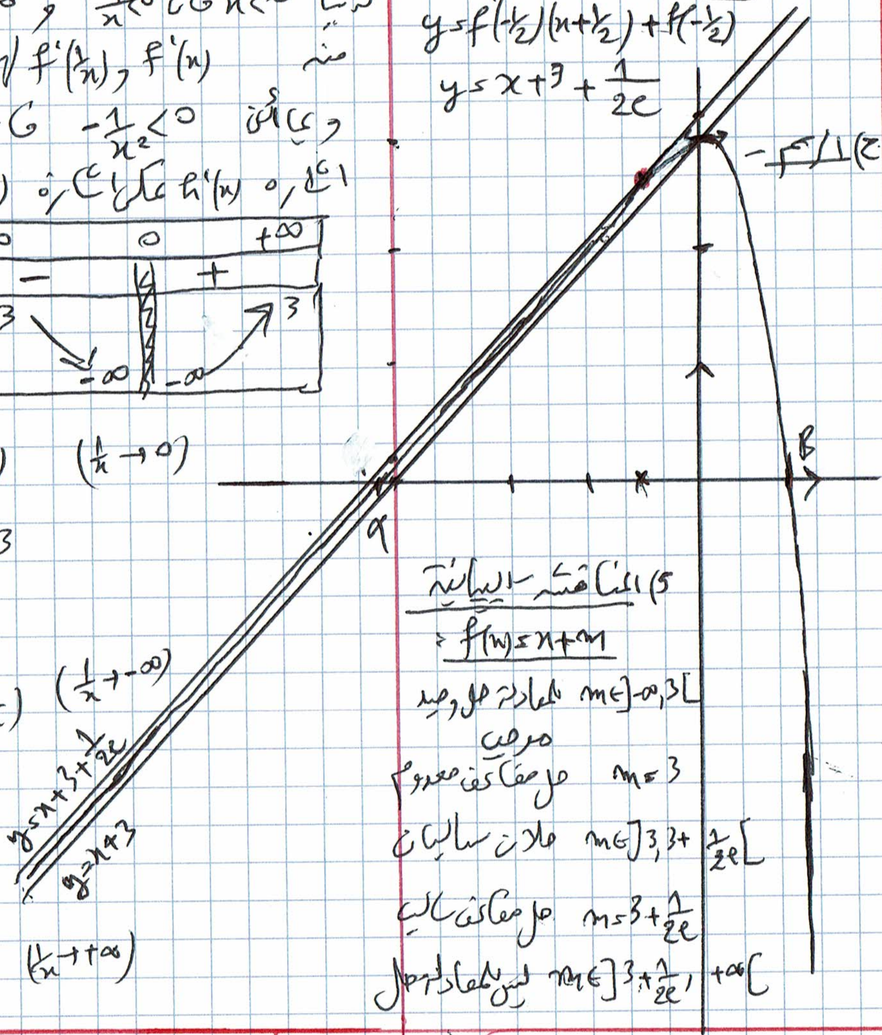
$f(0{,}75) \times f(0{,}8) < 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\beta$ حيث $0{,}75 < \beta < 0{,}8$ تحقق $f(\beta) = 0$

ج- (T) مماس يوازي (Δ) : معناه $f'(x) = 1$ أي $g(x) = 1$ أي $1 - (1+2x)e^{2x} = 1$

منه $-(1+2x)e^{2x} = 0$ أي $1 + 2x = 0$ منه $x = -\frac{1}{2}$

$y = f'(-\frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) + f(-\frac{1}{2})$

$y = x + 3 + \frac{1}{2e}$




5) المناقشة البيانية

$f(x) = x + m$ :

$m \in ]-\infty,3[$ للمعادلة حل وحيد موجب

$m = 3$ حل مضاعف معدوم

$m \in ]3, 3+\frac{1}{2e}[$ حلان سالبان

$m = 3 + \frac{1}{2e}$ حل مضاعف سالب

$m \in ]3+\frac{1}{2e}, +\infty[$ ليس للمعادلة حلول

⑥ $D = \mathbb{R}^*$ $h(x) = \frac{1 + 3x - e^{2/x}}{x}$

أ) من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$ ، $h(x) = f(\frac{1}{x})$

لدينا $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} + 3 - \frac{1}{x}e^{2(\frac{1}{x})} = \frac{1 + 3x - e^{2/x}}{x} = h(x)$

ب) $h(x) = f(\frac{1}{x})$

$h'(x) = -\frac{1}{x^2} \times f'(\frac{1}{x})$ (مشتقة دالة مركبة)

لدينا لما $x < 0$ فإن $\frac{1}{x} < 0$ و لما $x > 0$ فإن $\frac{1}{x} > 0$

منه $f'(\frac{1}{x})$ , $f'(x)$ لهما نفس الإشارة ، و نعلم أن $-\frac{1}{x^2} < 0$

إذا $h'(x)$ عكس إشارة $f'(\frac{1}{x})$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $-$ | ‖ | $+$ |
| $h(x)$ | $3$ ↘ $-\infty$ | ‖ | $-\infty$ ↗ $3$ |

$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} f(\frac{1}{x})$ $(\frac{1}{x} \to 0)$

$= f(0) = 3$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 3$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} h(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(\frac{1}{x})$ $(\frac{1}{x} \to -\infty)$

$= -\infty$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} h(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(\frac{1}{x})$ $(\frac{1}{x} \to +\infty)$

$= -\infty$