

إختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول

- 1- نعتبر المعادلة (E_n) ذات المجهولين الصحيحين x و y الآتية : $645x - 195y = 13^n - 54n - 1$ حيث $n \in \mathbb{N}$.
 1- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 13^n على 15.
 2- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها المعادلة (E_n) تقبل حولا في \mathbb{Z}^2 .
 3- جد الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E_2) بحيث $x_0 + y_0 = 4$ ثم حل المعادلة (E_2) .
 4- A عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ في النظام ذي الأساس 6 و يكتب $\overline{\beta 0 \gamma \gamma \gamma}$ في النظام ذي الأساس 5.
 • عين قيمة الأعداد الطبيعية α, β و γ ثم أكتب العدد A في النظام العشري.

التمرين الثاني

- 1- يحتوي صندوق على 4 كرات خضراء ثلاثة منها تحمل الرقم 1 و واحدة تحمل الرقم 2 وكرتين حمراوين تحملان الرقمين 0 و -1 ، كل الكرات متماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس.
 ✎ نسحب من الصندوق عشوائيا كرتين على التوالي بالارجاع
 • ما احتمال الحصول على كرتين جداء رقميهما سالب تماما.
 • ما احتمال الحصول على كرة حمراء في السحب الثاني.
 2- نقوم الآن باستبدال الكرات الحمراء بـ n كرة بيضاء تحمل الرقم 2 حيث $n > 1$ و نسحب من الصندوق عشوائيا كرتين على التوالي و بدون إرجاع.
 ✎ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين المسجلين على الكرتين.
 • عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله.
 • بين أن الأمل الرياضي $E(X) = \frac{4n^2 + 22n + 30}{(n+3)(n+4)}$

التمرين الثالث

- I. حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول Z : $Z^3 + 8 = 0$
 تذكير: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- II. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و D التي لواحقتها $z_A = -2$ ، $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ و $z_D = \bar{z}_B$.
- 1- أكتب العدد $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الآسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABD .
 ب) أكتب معادلة الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABD .
 ج) عين قيم العدد الصحيح n حتى يكون $\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right)^n$ حقيقي موجب.
- 2- لتكن النقطة C مرجح الجملة $\{(A; -1), (B; 1), (D; 1)\}$.
 أ) عين z_C لاحقة النقطة C ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.
 ب) أحسب قيس الزاوية الموجهة $(\overline{DC}; \overline{DO})$ ثم استنتج الوضع النسبي للمستقيم (DC) و الدائرة (C) .

3- الدوران الذي مركزه D و يحول النقطة A إلى B .

أ) أكتب العبارة المركبة للدوران R .

ب) تحقق أن $R(B)=C$ ثم استنتج صورة المثلث ABD بالدوران R .

4- عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\arg(\bar{z} + 2) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

بالتوفيق للجميع

الإجابة النموذجية

التمرين الأول

1- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 13^n على 15:

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
الباقى	1	13	4	7

2- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها المعادلة (E_n) تقبل حلولاً في \mathbb{Z}^2 :

لكي تقبل المعادلة (E_n) حلولاً في \mathbb{Z}^2 يجب أن يكون $\text{gcd}(645, 195) = 15$ يقسم $13^n - 54n - 1$ أي $13^n - 54n - 1 \equiv 0 [15]$ ، لدينا أربع حالات هي :

• من أجل $n = 4k$:

$13^{4k} - 54(4k) - 1 \equiv 0 [15]$ يكافئ $1 - 216k - 1 \equiv 0 [15]$
 $-6k \equiv 0 [15]$ نقسم على 3 نجد $-2k \equiv 0 [5]$
 بما أن 5 يقسم الجداء $(-2k)$ و 5 أولي مع 2 فإنه $k \equiv 0 [5]$ ومنه $k = 5p$ و $n = 4k = 4(5p) = 20p / p \in \mathbb{N}$

• من أجل $n = 4k + 1$:

$13^{4k+1} - 54(4k+1) - 1 \equiv 0 [15]$ يكافئ $-216k \equiv 42 [15]$
 $-k \equiv 2 [5]$ يكافئ $k \equiv 3 [5]$ ومنه $k = 5p + 3$ إذن $n = 4k + 1 = 4(5p + 3) + 1 = 20p + 13 / p \in \mathbb{N}$

• من أجل $n = 4k + 2$:

$13^{4k+2} - 54(4k+2) - 1 \equiv 0 [15]$ يكافئ $-216k - 105 \equiv 0 [15]$

يكافئ $k \equiv 0 [5]$ ومنه $k = 5p$ إذن

$n = 4k + 2 = 4(5p) + 2 = 20p + 2 / p \in \mathbb{N}$

• من أجل $n = 4k + 3$:

$13^{4k+3} - 54(4k+3) - 1 \equiv 0 [15]$ يكافئ $-6k - 6 \equiv 0 [15]$
 $-2k \equiv 2 [5]$ نقسم على 2 نجد $-k \equiv 1 [5]$ أي $k \equiv 4 [5]$ ومنه $k = 5p + 4$ إذن

$n = 4k + 3 = 4(5p + 4) + 3 = 20p + 19 / p \in \mathbb{N}$

ومنه قيم n هي :

$n \in \{20p; 20p + 13; 20p + 2; 20p + 19 / p \in \mathbb{N}\}$

3- إيجاد الحل الخاص :

نبسط المعادلة (E_2) :

$645x - 195y = 13^2 - 54(2) - 1$
 $43x - 13y = 4$ نجد 15 على (E_2) نقسم طرفي المعادلة

لدينا $\begin{cases} 43x_0 - 13y_0 = 4 \\ x_0 + y_0 = 4 \end{cases}$ نحل جملة المعادلة نجد $x_0 = 1$

و $y_0 = 3$ إذن الحل الخاص هو $(1; 3)$.

• حل المعادلة (E_2) :

لدينا $\begin{cases} 43x - 13y = 4 \dots\dots (*) \\ 43(1) - 13(3) = 4 \dots\dots (**) \end{cases}$ أي

$43(x-1) = 13(y-4)$ ، بما أن 13 يقسم الجداء $43(x-1)$

و 13 أولي مع 43 فإنه حسب غوص 13 يقسم $(x-1)$ أي

$x-1 = 13k$ ومنه $x = 13k + 1$ نعوض قيمة x في المعادلة

$(*)$ نجد $y = 43k + 3$ إذن مجموعة حلول المعادلة (E_2)

هي : $S = \{(13k + 1; 43k + 3) / k \in \mathbb{Z}\}$

4- تعيين قيمة الأعداد الطبيعية α, β, γ :

$$\begin{cases} A = \overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}^6 = \alpha \times 6^0 + \beta \times 6^1 + \alpha \times 6^2 + \beta \times 6^3 + \alpha \times 6^4 \\ A = \overline{\beta 0 \gamma \gamma}^5 = \gamma \times 5^0 + \gamma \times 5^1 + \gamma \times 5^2 + 0 \times 5^3 + \beta \times 5^4 \\ 1 \leq \alpha \leq 5 \\ 1 \leq \beta \leq 4 \\ 0 \leq \gamma \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{معناه} \begin{cases} A = 1333\alpha + 222\beta \\ A = 31\gamma + 625\beta \\ 1 \leq \alpha \leq 5 \\ 1 \leq \beta \leq 4 \\ 0 \leq \gamma \leq 4 \end{cases} \text{ أي}$$

$$\begin{cases} 43\alpha - 13\beta = \gamma \\ 1 \leq \alpha \leq 5 \\ 1 \leq \beta \leq 4 \\ 0 \leq \gamma \leq 4 \end{cases} \text{ أي} \begin{cases} 1333\alpha + 222\beta = 31\gamma + 625\beta \\ 1 \leq \alpha \leq 5 \\ 1 \leq \beta \leq 4 \\ 0 \leq \gamma \leq 4 \end{cases}$$

نلاحظ أن β, α حلين للمعادلة $(*)$ بالمطابقة مع المعادلة

$(**)$ نجد $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 4$.

كتابة العدد A في النظام العشري:

$$A = 1333\alpha + 222\beta = A = 1333(1) + 222(3) = 1999$$

التمرين الثاني

1-

• احتمال الحصول على كرتين جداء رقميهما هالب تماماً:

$$P(A) = \frac{2(1^1 \times 4^1)}{6^2} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

• احتمال الحصول على كرة حمراء في السحب الثاني:

$$P(B) = \frac{2(4^1 \times 2^1) + 2^2}{6^2} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

2-

• تعيين قيم المتغير العشوائي X :

الحالات الممكنة للسحب :

$$A_{n+4}^2 = \frac{(n+4)(n+3)(n+2)!}{(n+4-2)!} = (n+4)(n+3)$$

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ اذن } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

• امتنتاج طبيعة المثلث ABD :

$$\text{فإن } \arg \left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ و } \left| \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \text{ بما أن}$$

المثلث ABD متقايس الأضلاع.

(ب) كتابة معادلة الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABD :

بما أن المثلث متقايس الأضلاع فإن مركز ثقله هو مركز

للدائرة المحيطة به أي $z_G = \frac{z_A + z_B + z_D}{3} = 0$ نلاحظ أن

النقطة G هي مبدأ المعلم O ونصف قطرها هو

$$r = |OA| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2 = |OB| = |OD|$$

لدينا معادلة الدائرة (C): $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ اذن معادلة الدائرة

$$(C): x^2 + y^2 = 4 \text{ هي}$$

$$(ج) \text{ تعيين قيم العدد الصحيح } n \text{ حتى يكون } \left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \right)^n$$

حقيقي موجب :

$$\arg \left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \right)^n = 2k\pi \text{ حقيقي موجب معناه } \left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \right)^n$$

$$\text{أي } n \times \frac{\pi}{3} = 2k\pi \text{ ومنه } n = 6k / k \in \mathbb{Z}$$

2- (أ) تعيين z_C :

$$z_C = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_D}{-1+1+1} = \frac{-(-2)+1-i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}}{1}$$

اذن $z_C = 4$

• طبيعة الرباعي ABCD : معين

$$\text{التبرير : } CD = AC = AB = BD \text{ و } (\overline{AB}; \overline{AD}) \neq \frac{\pi}{2}$$

(ب) حساب قياس الزاوية الموجهة $(\overline{DC}; \overline{DO})$:

$$(\overline{DC}; \overline{DO}) = \arg \left(\frac{z_O - z_D}{z_C - z_D} \right) = \arg \left(\frac{-(1-i\sqrt{3})}{4-(1-i\sqrt{3})} \right)$$

$$= \arg \left(-i \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

• امتنتاج الوضع النمبي للمستقيم (DC) و الدائرة (C) :

بما أن $(\overline{DC}; \overline{DO})$ زاوية قائمة و النقطة $D \in (C)$ فإن

المستقيم (DC) مماس للدائرة (C) في النقطة D .

قانون الاحتمال :

$$P(X=2) = \frac{A_3^2}{A_{n+4}^2} = \frac{6}{(n+4)(n+3)}$$

$$P(X=3) = \frac{2(A_{n+1}^1 \times A_3^1)}{A_{n+4}^2} = \frac{6(n+1)}{(n+4)(n+3)}$$

$$P(X=4) = \frac{A_{n+1}^2}{A_{n+4}^2} = \frac{(n+1)(n)}{(n+4)(n+3)}$$

اذن :

X	2	3	4
$P(X=X_i)$	$\frac{6}{(n+4)(n+3)}$	$\frac{6(n+1)}{(n+4)(n+3)}$	$\frac{(n)(n+1)}{(n+4)(n+3)}$

$$\bullet \text{ تعيين أن } E(X) = \frac{4n^2 + 22n + 30}{(n+3)(n+4)}$$

$$E(X) = 2 \times \frac{6}{(n+4)(n+3)} + 3 \times \frac{6(n+1)}{(n+4)(n+3)} + 4 \times \frac{(n)(n+1)}{(n+4)(n+3)} = \frac{4n^2 + 22n + 30}{(n+3)(n+4)}$$

التمرين الثالث

I. حل المعادلة $z^3 + 8 = 0$:

$$\text{لدينا } z^3 + 8 = (z+2)(z^2 - 2z + 4)$$

$$z^3 + 8 = 0 \text{ تكافئ } (z+2)(z^2 - 2z + 4) = 0$$

$$\text{تكافئ } z+2=0 \text{ أي } z_0 = -2$$

$$\text{أو } z^2 - 2z + 4 = 0 \text{ نحسب } \Delta = -12 = i^2 \times 12 = (2i\sqrt{3})^2$$

$$\left\{ \begin{aligned} z_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - 2i\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3} \\ z_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3} \end{aligned} \right.$$

ومنه

$$S = \{-2; 1 - i\sqrt{3}; 1 + i\sqrt{3}\}$$

II

1- (أ) كتابة العدد $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي :

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1+i\sqrt{3}+2}{1-i\sqrt{3}+2} = \frac{(3+i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})}{(3-i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{لدينا } \left| \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \text{ و}$$

3- (أ) العبارة المركبة للدوران R :

لدينا العبارة المركبة للدوران هي $z' = az + b$

$$a = \frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

لأن المثلث ABD متقايس الأضلاع

أي $\left(\overline{DA}; \overline{DB}\right) = \frac{\pi}{3}$ لأنها في الاتجاه المباشر أو يمكن

التحقق حسابياً.

$$b = z_D(1-a) = (1+i\sqrt{3})\left(1 - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 2 \quad \text{أي } z_D = \frac{b}{1-a}$$

اذن العبارة المركبة للدوران R هي $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2$ أو

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2$$

(ب) تحقق أن $R(B) = C$:

$$z' = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_B + 2 = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - i\sqrt{3}) + 2 = 4 = z_C$$

اذن صورة B بالدوران R أي $R(B) = C$.

• اهتمتاج صورة المثلث ABD بالدوران R :

$$\text{لدينا } \begin{cases} R(D) = D \\ R(B) = C \\ R(A) = B \end{cases} \text{ اذن صورة المثلث } ABD \text{ بالدوران } R \text{ هو}$$

المثلث BCD .

4- تعيين (Γ) : لدينا $\arg(\bar{z} + 2) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$$\text{يكافئ } \arg(\bar{z} + 2) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ يكافئ } -\arg(z - (-2)) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\text{يكافئ } \arg(z - z_A) = -\frac{\pi}{6} - 2k\pi \text{ ومنه مجموعة النقط}$$

(Γ) هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A باستثناء النقطة A .

