Email: saitameur3@gmail.com 023 71 54 67 :فاكس 023 71 54 63 / 0550 47 22 35 :رقم الهاتف

المستوى: الثالثة رياضيات ديسمبر 2021

اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

المدة : ساعتين.

التمرين 1

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = e^{-x} + x - 1$

1) ادرس تغيرات الدالة g.

2) احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x}{x+e^{-x}}$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1)ا) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{xe^{x}}}$

ب) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف ثم فسر النتائج هندسيا.

2) ا) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $f'(x) = \frac{(1+x)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3)ا) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند الفاصلة 0.

ب) تحقق من أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $x\text{-}f(x) = \frac{x\,g(x)}{g(x)+1}$

ج) استنتج الوضع النسبي ل (C_f) و المماس (T).

4) انشئ (T) و (C_f).

5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد و اشارة حلول المعادلة :

$$\frac{x\,e^{x}}{x\,e^{x}+1} - 1 = m$$

التمرين 2

I) لتكن الدالة g المعرفة على $]0\,;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x-1+2\ln x$

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2)احسب $g(1)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]0\,;+\infty[$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=x-2+(\ln x)^2-\ln x$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1)احسب نهايات الدالة fعند حدود مجموعة التعريف ثم فسر النتائج هندسيا.

2)ا) بين انه من اجل كل x من $]0\,;+\infty[$ فإن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين ان (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث :

$0.4<\alpha<0.5$ و $2.1<\beta<2.2$

4) أ) حل في المجال $]0\,;+\infty[$ المعادلة : $(\ln x)^2-\ln x-2=0$

ب) استنتج ان المنحنى (C_f) يقطع(Δ) ذي المعادلة $y=x$ في نقطتين يطلب تعيين احداثياتهما.

ج) ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ).

5) عين احداثيي النقطة A من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) موازيا للمستقيم (Δ) ،

ثم اكتب معادلته.

6) بين ان المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها.

7) انشئ كلا من (Δ) ، (T) و (C_f).

8) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد و اشارة حلول المعادلة :

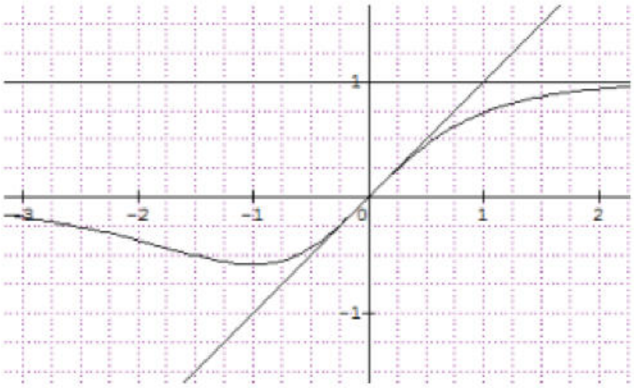
$$(\ln x)^2-\ln x+m-2=0$$

بالتوفيق.

<u>التصحيح النموذجي</u>

العلامة	الحل	رقم التمرين
	<u>I)</u> $g(x)=e^{-x}+x-1$ 1 / دارسة اتجاه تغيرات الدالة g. g دالة تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ودالتها المشتقة: $g'(x)=-e^{-x}+1$ $g'(x)<0$ من أجل كل x من $]-\infty;0[$ ومنه g متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ $g'(x)>0$ من أجل كل x من $]-\infty;0[$ ومنه g متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ 2 / $g(0)=0$ ومنه: $g(x)\geq 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ **<u>II)</u>** 1 / أ / $f(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^{x}}}$ 1/ب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ إذن تمثيل الدالة f يقبل مستقيمين مقاربين معادلتاهما $y=0$ و $y=1$.	التمرين 1
	2/أ/ $f'(x)=\dfrac{(1+x)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$	التمرين2

4/ إنشاء (Δ) و (C_f)



/5

<u>المناقشة البيانية:</u> المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$\frac{xe^x}{xe^x+1}-1=m$ تكافئ: $f(x)=m+1$.

إذا كان $m\in\left]-\infty;f(-1)-1\right[\cup\left[0;+\infty\right[$ ليس للمعادلة حل.

إذا كان $m=\frac{2-e}{e-1}$ للمعادلة حل مضاعف -1

إذا كان $m\in\left]f(-1)-1;-1\right[$ للمعادلة حلان سالبان.

إذا كان $m\in\left[-1;0\right[$ للمعادلة حل موجب.

I) الدالة العددية g معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x-1+2\ln x$.

1) دراسة تغيرات الدالة g :

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن: $g'(x)=1+\dfrac{2}{x}$.

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن: $0<g'(x)$، و بالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

2) $g(1)=1-1+2\ln 1=0$.

إشارة $g(x)$:

x	0 1 $+\infty$
$g(x)$	$-$ 0 $+$

II) الدالة العددية f معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-2+(\ln x)^2-\ln x$.

1) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2+\ln x\left(-1+\ln x\right)\right)=+\infty$.

بـ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(x-2+\ln x\left(-1+\ln x\right)\right)=+\infty$.

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

2) أ- تبيان أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن:

$$f'(x)=1+\frac{2}{x}\ln x-\frac{1}{x}=\frac{x-1+2\ln x}{x}=\frac{g(x)}{x}$$

اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$، و بالتالي الدالة f متناقصة على المجال $]0;1]$ و متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

بـ- جدول تغيرات الدالة f:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

3) تبيان أن المنحنى يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث: $0,4<\alpha<0,5$ و $2,1<\beta<2,2$

• الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]0;1[$ و $]0.4;0.5[\subset]0;1[$ و $\begin{cases} f(0.4) \approx 0,15 \\ f(0.5) \approx -0,32 \end{cases}$ أي $f(0.4) \times f(0.5) < 0$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α، حيث $0,4 < \alpha < 0,5$.

• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و $]2.1;2.2[\subset]1;+\infty[$ و $\begin{cases} f(2.1) \approx -0,09 \\ f(2.2) \approx 0,03 \end{cases}$ أي $f(2.1) \times f(2.2) < 0$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]1;+\infty[$ حلا وحيدا β، حيث $2,1 < \beta < 2,2$.

4) أ- حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة: $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$.

$(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$ تكافئ $(1+\ln x)(\ln x - 2) = 0$ تكافئ $\begin{cases} \ln x = -1 \\ \ln x = 2 \end{cases}$ أو أي: $\begin{cases} x = e^{-1} = \frac{1}{e} \\ \ln x = e^2 \end{cases}$ أو.

ب- نستنتج أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ في النقطتين $B\left(e^{-1};e^{-1}\right)$ و $C(e^2;e^2)$.

جـ- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ):

لدينا: $f(x) - x = (\ln x)^2 - \ln x - 2$ و منه إشارة الفرق من إشارة: $(\ln x)^2 - \ln x - 2$.

x	0		e^{-1}		e^2		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	

لما $x \in \left]0;\frac{1}{e}\right[$، المنحنى (C_f) فوق المستقيم (Δ).

لما $x \in \left]e^2;+\infty\right[$، المنحنى (C_f) تحت المستقيم (Δ).

المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطتين $B\left(e^{-1};e^{-1}\right)$ و $C(e^2;e^2)$.

5) تعيين إحداثيي النقطة A من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) موازيا للمستقيم (Δ):

نحل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة $f'(x) = 1$.

$f'(x) = 1$ تكافئ $\frac{g(x)}{x} = 1$ تكافئ $g(x) = x$ تكافئ $-1 + 2\ln x = 0$ تكافئ $\ln x = \frac{1}{2}$ أي $x = \sqrt{e}$.

ومنه مماس المنحنى (C_f) في النقطة $A\left(\sqrt{e};\sqrt{e}-\frac{9}{4}\right)$ موازي للمستقيم (Δ) .

كتابة معادلة للمماس (T) :

لدينا : $(T): y=f'\left(\sqrt{e}\right)\left(x-\sqrt{e}\right)+f\left(\sqrt{e}\right)$ ومنه $(T): y=x-\frac{9}{4}$.

6) تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف :

الدالة f' قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن :

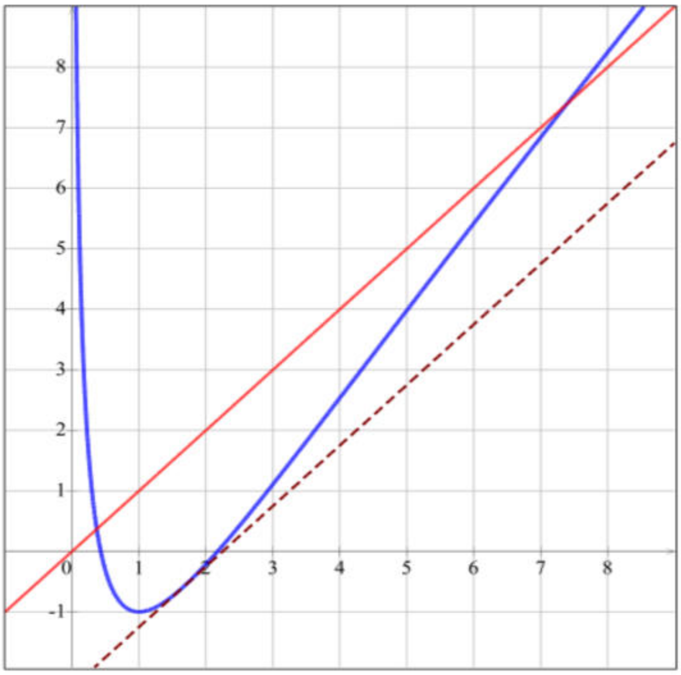
$$f''(x)==\frac{g'(x)\times x-g(x)}{x^2}=\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)\times x-(x-1+2\ln x)}{x^2}=\frac{3-2\ln x}{x^2}$$

إشارة $f''(x)$:

x	0		$\sqrt{e^3}$		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	

إذن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف هي $\omega\left(\sqrt{e^3};\sqrt{e^3}-\frac{5}{4}\right)$.

7) الرسم :



8) المناقشة البيانية :

المعادلة $(\ln x)^2 - \ln x + m - 2 = 0$ تكافئ $f(x) = x - m$.

حلول المعادلة $f(x) = x - m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (d_m) ذو المعادلة $y = x - m$.

إذا كان $m = \frac{9}{4}$ المعادلة تقبل حل واحد .

إذا كان $m \in \left]\frac{9}{4};+\infty\right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

إذا كان $m \in \left]-\infty;\frac{9}{4}\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين .