

الفرض المبروس الثاني في مادة الرياضيات

التمرين 01 : (07 نقاط)

نعتبر كثير حدود  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  حيث :  $f(x) = 2x^2 - x - 1$

- (1) عين جذور  $f(x)$  ثم اكتب تحليلا لـ  $f(x)$  .
- (2) استنتج حلول المعادلة :  $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$
- (3) استنتج حلول المتراجحة :  $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 < 0$

التمرين 02 : (13 نقطة)

(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :

$$g(x) = e^x - x - 1$$

ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  مستنتجا إشارتها ، ثم علل أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$e^x - x > 0$$

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(0; \vec{i}; \vec{j})$  .

- (1) احسب نهايتي  $f$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$  ثم فسر النتائج هندسيا .
- (2) ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم أعط جدول تغيراتها .
- (3) عين معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة التي فاصلتها 0 .
- (4) ادرس الوضعية النسبية لـ  $(C_f)$  و  $(T)$  ، ماذا نسمي النقطة التي فاصلتها 0 ؟
- (5) ارسم  $(T)$  و  $(C_f)$  في المعلم السابق .

مريض حال للفرق الثاني

في النهايات

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x (1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x})) = +\infty$$

الاشتقاق: من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$ :  $g'(x) = e^x - 1$

$e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = e^0 \Rightarrow x = 0$   
 $e^x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow x > 0$   
 $e^x - 1 < 0 \Rightarrow e^x < e^0 \Rightarrow x < 0$

$x$	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		-	+

الاشتقاق لثبات جدول التغير:

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$		-	+

$g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$

\* استنتاج إشارة  $g(x)$ :

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$		+	+

\* التحليل أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :

$e^x - x > 0$

لدينا  $g(x) > 0$  معناها:  $e^x - x - 1 > 0$

ومنه:  $e^x - x > 1$

بذو:  $e^x - x > 0$

(II)  $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$ ;  $D_f = \mathbb{R}$   
 \* حساب النهايات:

التمرين 01: (7 نقاط)

$f(x) = 2x^2 - x - 1$

(1) - تحديد جذور  $f(x)$ :  
 بما أن  $2 \cdot (-1) - 1 = 0$

$x_1 = 1$   
 $x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$

\* تحليل  $f(x)$ :

$f(x) = 2(x + \frac{1}{2})(x - 1)$

$f(x) = (2x + 1)(x - 1)$

(2) - استنتاج طول المحل:  $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$

$2(\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ ;  $D = ]0; +\infty[$   
 نضع  $y = \ln x$  تصبح المعادلة:

$2y^2 - y - 1 = 0$

ومنه:

$\begin{cases} y = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} \ln x = 1 \\ \ln x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e \\ x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$

$S = \{e; \frac{1}{\sqrt{e}}\}$

(3) - استنتاج حلول المعادلة:

$2(\ln x)^2 - \ln x - 1 < 0$

$x$	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	e	$+\infty$
$2(\ln x)^2 - \ln x - 1$	+	-	+	+

$S = ]\frac{1}{\sqrt{e}}; e[$

التمرين 02: (13 نقطة)

(I)  $g(x) = e^x - x - 1$ ;  $D_g = \mathbb{R}$

\* حساب النهايات:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x - 1) = +\infty$

$$f'(1) = \frac{1}{e-1}$$

(3) - معادلة التماس ل (T) عند النقطة التي  
فاصلتها:

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$f'(1) = \frac{(1-0)e^0}{(e^0-0)^2} = 1$$

$$f(1) = 0$$

$$(T): y = x$$

(4) - دراسة (f) و (T):

لدراسة إشارة الفرق

$$f(x) - y = \frac{x}{e^x - x} - x = \frac{x - x(e^x - x)}{e^x - x}$$

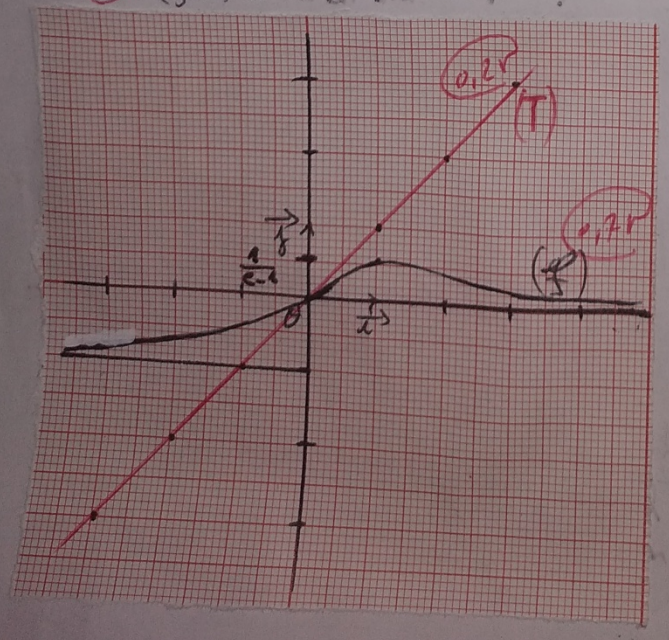
$$f(x) - y = \frac{x - x e^x + x^2}{e^x - x} = \frac{-x(-1 + e^x - x)}{e^x - x}$$

$$f(x) - y = \frac{-x \cdot g(x)}{e^x - x}$$

لدينا:  $e^x - x > 0$  و منه إشارة الفرق من إشارة  $-x \cdot g(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
-x	+	0	-
g(x)	+	0	+
f(x) - y	+	0	-
الوضع التقريبي	(f) > (T)	(f) = (T)	(f) < (T)

محل النقطة (0,0) نقطة التقاطع ل (f) و (T)



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x}{e^x - x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x(1)}{x(e^x - 1)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{e^x - 1} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{e^x - x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x(1)}{x(e^x - 1)} \right)$$

$$= 0$$

التفسير الهندسي:

$y = -1$  مستقيم تقارب أفقي في جوانب  $-\infty$

$y = 0$  مستقيم تقارب أفقي في جوانب  $+\infty$

(2) - دراسة اتجاه تغير الدالة f:

من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(e^x - x) - (e^x - 1)x}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x - x - x e^x + x}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - x)^2}$$

$$e^x > 0, (e^x - x)^2 > 0$$

إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $1-x$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
1-x	+	0	-
f'(x)	+	0	-

$$1-x=0 \rightarrow x=1$$

التحليل ل (f) ل (T):

تزيد زيل التحليلات:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)	+	0	-
f'(x)	-	0	+